

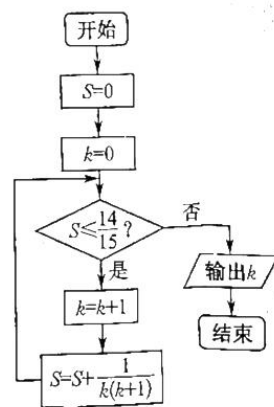
## 高三理科数学

### 考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $M = \{x | \sqrt{x} \leq 2\}$ ,  $N = \{x | -3 < x < 1\}$ , 则  $M \cap N =$   
 A.  $\{x | 0 \leq x < 2\}$       B.  $\{x | -3 < x \leq 4\}$       C.  $\{x | 1 \leq x \leq 4\}$       D.  $\{x | 0 \leq x < 1\}$
2. 已知复数  $z = \frac{1+3i}{3-mi}$  ( $m \in \mathbf{R}$ ) 是纯虚数，则  $m =$   
 A. 3      B. 1      C. -1      D. -3
3. 古代名著《九章算术》中记载了求“方亭”体积的问题，方亭是指正四棱台。今有一个方亭型的水库，该水库的下底面的边长为 20 km，上底面的边长为 40 km，若水库的最大蓄水量为  $\frac{28}{3} \times 10^9 \text{ m}^3$ ，则水库深度（棱台的高）为  
 A. 10 m      B. 20 m      C. 30 m      D. 40 m
4. 已知抛物线  $C: y^2 = 2px$  ( $p > 0$ )，过焦点  $F$  的直线  $4x + 3y - 4 = 0$  与  $C$  在第四象限交于  $M$  点，则  $|MF| =$   
 A. 3      B. 4      C. 5      D. 6
5. 记  $S_n$  为等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和，已知  $S_4 = 36$ ,  $S_7 = 105$ ，则  $\frac{a_7}{a_4} =$   
 A. 3      B.  $\frac{8}{3}$   
 C. 2      D.  $\frac{9}{5}$
6. 执行如图所示的程序框图，则输出的  $k$  的值为  
 A. 14  
 B. 15  
 C. 16  
 D. 17



7. 某部门统计了某地区今年前 7 个月在线外卖的规模如下表:

月份代号 $x$	1	2	3	4	5	6	7
在线外卖规模 $y$ (百万元)	11	13	18	★	28	★	35

其中 4、6 两个月的在线外卖规模数据模糊,但这 7 个月的平均值为 23. 若利用回归直线方程  $y = \hat{b}x + \hat{a}$  来拟合预测,且 7 月相应于点  $(7, 35)$  的残差为  $-0.6$ , 则  $\hat{a} - \hat{b} =$

- A. 1.0                      B. 2.0                      C. 3.0                      D. 4.0
8. 已知  $(2x - \frac{1}{mx} - 1)^5$  的展开式中  $x^3$  的系数为  $-40$ , 则实数  $m =$
- A. 4                          B. 2                          C.  $-2$                       D.  $-4$
9. 记函数  $f(x) = 2\cos(\omega x + \varphi) + b$  ( $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的最小正周期为  $T$ , 若  $f(\frac{T}{4}) = -2$ , 且函数  $f(x)$  的图象关于点  $(\frac{\pi}{6}, -3)$  对称, 则当  $\omega$  取最小值时,  $f(\frac{\pi}{8}) =$

- A. 2                          B. 1                          C.  $-1$                       D.  $-2$
10. 已知曲线  $y = f(x) = 2e^x$  在点  $A$  处的切线  $l_1$  与  $x$  轴交于点  $B$ , 曲线  $y = g(x) = -2e^x$  在点  $C$  处的切线  $l_2$  与  $x$  轴交于点  $D$ , 若  $l_1 \perp l_2$ , 则  $|AB| + |CD|$  的最小值为

- A.  $\sqrt{2}$                       B.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$                       C.  $2\sqrt{2}$                       D.  $3\sqrt{2}$
11. 已知  $F$  是双曲线  $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的右焦点,  $O$  为坐标原点,  $A$  是  $E$  的右支上一点, 若  $|AF| = a, |OA| = b$ , 则  $E$  的离心率为

- A.  $\sqrt{3}$                       B.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$                       C.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$                       D. 2
12. 已知函数  $f(x), g(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 且  $f(x) - g(1+x) = 2, g(x) + f(3-x) = 4$ , 若  $g(x)$  为偶函数,  $f(3) = 1$ , 则  $\sum_{k=1}^{28} g(k) =$

- A. 24                          B. 26                          C. 28                          D. 30

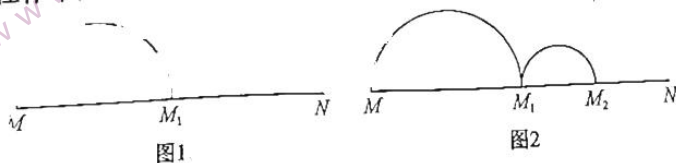
二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量  $m = (-1+a, 2-a), n = (3-a, 4+a)$ , 若  $(m+n) \parallel m$ , 则实数  $a =$  \_\_\_\_\_.

14. 写出与圆  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  和  $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$  都相切的一条直线的方程 \_\_\_\_\_.

15. 已知球  $O$  的半径为 2, 四棱锥的顶点均在球  $O$  的球面上, 当该四棱锥的体积最大时, 其高为 \_\_\_\_\_.

16. 现取长度为 2 的线段  $MN$  的中点  $M_1$ , 以  $MM_1$  为直径作半圆, 该半圆的面积为  $S_1$  (图 1), 再取线段  $M_1N$  的中点  $M_2$ , 以  $M_1M_2$  为直径作半圆, 所有半圆的面积之和为  $S_2$  (图 2), 再取线段  $M_2N$  的中点  $M_3$ , 以  $M_2M_3$  为直径作半圆, 所有半圆的面积之和为  $S_3$ , 以此类推, 则  $\sum_{i=1}^n iS_i =$  \_\_\_\_\_.



【高三开学考·理科数学 第 2 页(共 4 页)】

L

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ,  $\sin(B-C)\tan A = \sin B \sin C$ .

(1) 证明:  $\frac{a^2+b^2}{c^2}$  为定值;

(2) 若  $c = \sqrt{3}$ ,  $\cos C = \frac{3}{4}$ , 求  $\triangle ABC$  的周长.

18. (12 分)

青少年近视问题备受社会各界广泛关注, 某研究机构为了解学生对预防近视知识的掌握程度, 对某校学生进行问卷调查, 并随机抽取 200 份问卷, 发现其得分(满分: 100 分)都在区间  $[50, 100]$  中, 并将数据分组, 制成如下频率分布表:

分数	$[50, 60)$	$[60, 70)$	$[70, 80)$	$[80, 90)$	$[90, 100]$
频率	0.15	0.25	$m$	0.30	0.10

(1) 试估计这 200 份问卷得分的平均值(同一组中的数据用该组区间的中点值代表);

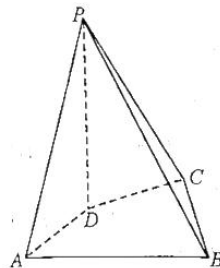
(2) 用样本估计总体, 用频率估计概率, 从该校学生中随机抽取 4 人深入调查, 设  $X$  为抽取的 4 人中得分在  $[70, 100]$  的人数, 求  $X$  的分布列与数学期望.

19. (12 分)

在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PD \perp$  底面  $ABCD$ ,  $AB \perp AD$ ,  $AB=4$ ,  $AD=\sqrt{2}$ ,  $BC=2\sqrt{3}$ ,  $CD=\sqrt{6}$ .

(1) 证明: 平面  $PCD \perp$  平面  $PBC$ ;

(2) 若  $PD=4$ , 求二面角  $A-PB-C$  的余弦值.





20. (12分)

已知椭圆  $E$  的中心为坐标原点  $O$ , 对称轴分别为  $x$  轴、 $y$  轴, 且过  $A(-1, 0), B(\frac{\sqrt{2}}{2}, -1)$  两点.

(1) 求  $E$  的方程;

(2) 设  $F$  为椭圆  $E$  的一个焦点,  $M, N$  为椭圆  $E$  上的两动点, 且满足  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AF} = 0$ , 当  $M, O, N$  三点不共线时, 求  $\triangle MON$  的面积的最大值.

21. (12分)

已知函数  $f(x) = a \ln x - \frac{2}{x^2} + \frac{a}{x} (a \in \mathbf{R})$ .

(1) 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 若  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$  是  $f(x)$  的两个极值点, 证明:  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{1}{2}a^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}a^2$ .

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

在直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \left( 3^t + \frac{1}{3^t} \right), \\ y = 3^t - \frac{1}{3^t}, \end{cases}$  ( $t$  为参数), 以坐标原点为极点,  $x$  轴正

半轴为极轴建立极坐标系, 已知直线  $l$  的极坐标方程为  $m \rho \cos \theta + \rho \sin \theta - 1 = 0$ .

(1) 求曲线  $C$  的普通方程;

(2) 若  $l$  与  $C$  有两个不同公共点, 求  $m$  的取值范围.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10分)

已知函数  $f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right| + |x + 1|$ .

(1) 求不等式  $f(x) \leq 3$  的解集;

(2) 设函数  $g(x) = |x - a| + |x + 2|$ , 若对任意  $x_1 \in \mathbf{R}$ , 都存在  $x_2 \in \mathbf{R}$ , 使得  $f(x_1) = g(x_2)$  成立, 求实数  $a$  的取值范围.

### 高三理科数学参考答案、提示及评分细则

1. D 因为  $M = \{x \mid \sqrt{x} \leq 2\} = \{x \mid 0 \leq x \leq 4\}$ ,  $N = \{x \mid -3 < x < 1\}$ , 所以  $M \cap N = \{x \mid 0 \leq x < 1\}$ .
2. B  $z = \frac{1+3i}{3-mi} = \frac{(1+3i)(3+mi)}{9+m^2} = \frac{3-3m+(9+mi)}{9+m^2}$ , 由题意可知,  $\begin{cases} 3-3m=0, \\ 9+m^2=0. \end{cases}$  解得  $m=1$ .
3. A 设水库深度为  $h$  km, 由题意,  $\frac{1}{3}(20^2+40^2+\sqrt{20^2 \times 40^2}) \cdot h = \frac{28}{3}$ , 解得  $h=0.01$  km, 即  $h=10$  m.
4. C 由题意可知,  $F$  的坐标为  $(1, 0)$ , 则  $\frac{p}{2}=1$ , 所以  $p=2$ , 则抛物线  $C$  的方程为  $y^2=4x$ . 设  $M(x_0, -2\sqrt{x_0})$ , 由  $k_{MF} = \frac{-2\sqrt{x_0}}{x_0-1} = -\frac{4}{3}$ , 解得  $x_0=4$ , 所以  $|MF| = x_0 + \frac{p}{2} = 5$ .
5. D 设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 由  $S_2=36, S_7=105$ , 得  $\begin{cases} 2a_1+6d=36, \\ 7a_1+21d=105. \end{cases}$  解得  $a_1=3, d=4$ , 则  $a_7=a_1+6d=27, a_4=a_1+3d=15$ , 所以  $\frac{a_7}{a_4} = \frac{27}{15} = \frac{9}{5}$ .
6. B 由题知  $S = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$ ,  $k=15$  时,  $S = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{15} - \frac{1}{16}) = \frac{15}{16} > \frac{11}{15}$ , 开始出现  $S > \frac{11}{15}$ , 故输出的  $k$  的值为 15.
7. B  $\bar{x} = \frac{1}{7}(1+2+3+4+5+6+7) = 4, \bar{y} = 23$ , 所以  $16 - \hat{a} = 23$ . 因为相应于点  $(7, 35)$  的残差为  $-0.6$ , 则点  $(7, 35.6)$  在回归直线  $\hat{y} = bx + \hat{a}$  上, 即  $7b - \hat{a} = 35.6$ , 解得  $\hat{a} = 6.2, b = 4.2$ , 则  $\hat{a} - b = 2.0$ .
8. A 法一:  $(2x - \frac{1}{mx} - 1)^5$  的展开式中  $x^5$  的项只有  $C_1^5(2x - \frac{1}{mx})^4(-1)$  和  $C_5^5(2x - \frac{1}{mx})^3(-1)^5$ , 因此  $x^5$  的系数为  $C_1^5 C_4^1 \times 16 \times \frac{1}{m} - C_5^5 C_3^3 \times 8 = \frac{480}{m} - 160$ , 由题意可知,  $\frac{480}{m} - 160 = -40$ , 解得  $m=4$ .
- 法二: 因为  $(2x - \frac{1}{mx} - 1)^6 = [1 - (\frac{1}{mx} - 2x)]^6 = C_0^6 (\frac{1}{mx} - 2x)^0 + C_1^6 (\frac{1}{mx} - 2x)^1 + C_2^6 (\frac{1}{mx} - 2x)^2 + \dots + C_6^6 (\frac{1}{mx} - 2x)^6$ , 若  $2k - r = 5$ , 则  $k=3, r=3$  或  $k=4, r=5$ , 所以  $x^5$  的系数为  $C_2^6 C_3^3 \times (-2)^3 \times m^4 - C_4^6 C_5^1 \times (-2)^5 \times m^{-1} = -160 + \frac{480}{m} = -40$ , 解得  $m=4$ .
9. D 由题意可知,  $T = \frac{2\pi}{\omega}, b = -3$ , 由  $f(\frac{T}{4}) = -2$ , 得  $2\cos(\frac{\pi}{2} + \varphi) - 3 = -2$ , 所以  $\sin \varphi = -\frac{1}{2}$ , 因为  $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ , 所以  $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ , 又函数  $f(x)$  的图象关于点  $(\frac{\pi}{6}, -3)$  对称, 所以  $\frac{\omega\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$ , 所以  $\omega = 6k + 4, k \in \mathbf{Z}$ , 当  $k=0$  时,  $\omega$  取得最小值 4, 则  $f(x) = 2\cos(4x - \frac{\pi}{6}) - 3$ , 故  $f(\frac{\pi}{8}) = 2\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) - 3 = -2$ .
10. C 法一: 设  $A(x_1, 2e^{x_1}), f'(x) = 2e^x$ , 则  $f'(x_1) = 2e^{x_1}$ , 所以直线  $AB$  的方程为  $y - 2e^{x_1} = 2e^{x_1}(x - x_1)$ , 令  $y=0$ , 得  $x = x_1 - 1$ , 则  $B(x_1 - 1, 0)$ , 所以  $|AB| = \sqrt{4e^{2x_1} + 1}$ . 设  $C(x_2, -2e^{x_2}), g'(x) = -2e^x$ , 则  $g'(x_2) = -2e^{x_2}$ . 同理  $|CD| = \sqrt{4e^{2x_2} + 1}$ . 由  $l_1 \perp l_2$  得,  $-4e^{x_1} \cdot e^{x_2} = -1$ , 所以  $e^{x_2} = \frac{1}{4e^{x_1}}$ , 则  $|CD| = \sqrt{\frac{1}{4e^{2x_1}} + 1}$ , 所以  $|AB| + |CD| = \sqrt{4e^{2x_1} + 1} + \sqrt{\frac{1}{4e^{2x_1}} + 1}$ . 令  $4e^{2x_1} = t (t > 0)$ , 则  $h(t) = \sqrt{t+1} + \sqrt{\frac{1}{t}+1} (t > 0)$ , 则  $h'(t) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{t+1}} + \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{t}{t+1}} \times (-\frac{1}{t^2}) = \frac{t - \sqrt{t}}{2t^2 \sqrt{t+1}}$ , 令  $h'(t) > 0$ , 解得  $t > 1$ . 令  $h'(t) < 0$ , 解得  $0 < t < 1$ , 所以  $h(t)$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 则  $h(t)_{\min} = h(1) = 2\sqrt{2}$ , 所以  $|AB| + |CD|$  的最小值为  $2\sqrt{2}$ .
- 法二:  $|AB| + |CD| = \sqrt{4e^{2x_1} + 1} + \sqrt{\frac{1}{4e^{2x_1}} + 1} \geq 2\sqrt{\sqrt{(1+4e^{2x_1})} \times (\frac{1}{4e^{2x_1}} + 1)} \geq 2\sqrt{\sqrt{2+2\sqrt{4e^{2x_1}} \times \frac{1}{4e^{2x_1}}}} =$

$2\sqrt{2}$ , 当且仅当  $4e^{2x_1} = \frac{1}{4e^{2x_1}}$ , 即  $x_1 = -\ln 2$  时两个“=”同时成立, 所以  $|AB| + |CD|$  的最小值为  $2\sqrt{2}$ .

11. A 法一: 若点  $A$  是  $E$  的右顶点, 则  $|AF| = a$ ,  $|OA| = b$ ,  $a + b = c$ , 又  $a^2 = b^2 + c^2$ , 得  $2ab = 0$ , 这是不可能的. 不妨设点  $A(x_0, y_0)$  在第一象限, 由题意可知,  $|OF| = c$ , 则  $|OA|^2 + |AF|^2 = |OF|^2$ , 所以  $\angle OAF = 90^\circ$ , 在  $\triangle OAF$  中,  $\cos \angle AOF = \frac{b}{c}$ , 则  $x_0 = b \cos \angle AOF = \frac{b^2}{c}$ ,  $\sin \angle OFA = \frac{b}{c}$ , 则  $y_0 = a \sin \angle OFA = \frac{ab}{c}$ , 将点  $(\frac{b^2}{c}, \frac{ab}{c})$  代入  $E$  的方程得  $\frac{b^4}{a^2 c^2} - \frac{a^2 b^2}{b^2 c^2} = 1$ , 整理得  $\frac{b^4 - a^4}{a^2 c^2} = 1$ , 即  $(b^2 - a^2)(b^2 + a^2) = a^2 c^2$ , 所以  $(b^2 - a^2)c^2 = a^2 c^2$ , 则  $b^2 = 2a^2$ , 所以  $E$  的离心率为  $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{3}$ .

法二: 设点  $A(x_0, y_0)$  在第一象限, 由题意可知,  $|OF| = c$ , 则  $|OA|^2 + |AF|^2 = |OF|^2$ , 所以  $\angle OAF = 90^\circ$ , 在  $\triangle OAF$  中,  $\cos \angle AOF = \frac{b}{c}$ , 则  $x_0 = b \cos \angle AOF = \frac{b^2}{c}$ , 由双曲线的第二定义可知  $\frac{|AF|}{x_0 - \frac{a^2}{c}} = e$ , 即  $\frac{a}{x_0 - \frac{a^2}{c}} = \frac{c}{a}$ , 解得  $x_0 = \frac{2a^2}{c}$ , 所

以  $b^2 = 2a^2$ , 因此  $E$  的离心率为  $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{3}$ .

12. B 因为  $g(x)$  为偶函数, 所以  $g(-x) = g(x)$ , 由  $g(x) + f(3-x) = 4$ , 得  $g(-x) + f(3+x) = 4$ , 所以  $f(3-x) = f(3+x)$ , 则  $f(x)$  的图象关于直线  $x=3$  对称, 由  $f(x) - g(1+x) = 2$ , 得  $f(3-x) - g(4-x) = 2$ , 将其代入  $g(x) + f(3-x) = 4$ , 得  $g(x) + g(4-x) = 2$ , 则  $g(-x) + g(4+x) = 2$ , 所以  $g(x) + g(4-x) = 2$ , 则  $g(x-4) + g(8+x) = 2$ , 所以  $g(x) = g(8+x)$ , 则  $g(x)$  的一个周期为 8. 由  $f(3) - g(4) = 2$ , 得  $g(4) = -1$ , 由  $g(2) + g(2) = 2$ , 得  $g(2) = 1$ , 由  $g(x) + g(4-x) = 2$ , 得  $g(1) + g(3) = 2$ , 由  $g(x) + g(4+x) = 2$ , 得  $g(1) + g(5) = 2$ ,  $g(2) + g(6) = 2$ ,  $g(3) + g(7) = 2$ ,  $g(4) + g(8) = 2$ , 则  $g(1) + g(2) + g(3) + g(4) + g(5) + g(6) + g(7) + g(8) = 8$ ,  $\sum_{k=1}^{26} g(k) = 3[g(1) + g(2) + g(3) + g(4) + g(5) + g(6) + g(7) + g(8)] + g(1) + g(2) + g(3) + g(4) = 3 \times 8 + 2 + 1 - 1 = 26$ .

13.  $\frac{5}{4} m+n=(2,6)$ , 由  $(m+n) \parallel m$ , 得  $6(-1+a) - 2(2-a) = 0$ , 解得  $a = \frac{5}{4}$ .

14.  $y = 2\sqrt{2}x - 3 - 2\sqrt{2}$  或  $y = -2\sqrt{2}x - 3 + 2\sqrt{2}$  或  $y = 1$  (答案不唯一, 3 个中任填一个即可) 易知圆  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  和  $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$  外切, 显然  $y=1$  与这两圆都相切. 设直线  $y=kx+b$  与圆  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  和  $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$  都相切, 则  $\frac{|k+b|}{\sqrt{1+k^2}} = 1$  且  $\frac{|k+b-3|}{\sqrt{1+k^2}} = 2$ , 所以  $2|k+b| = |k+b-3|$ . 令  $k+b=t$ , 则  $t^2 + 2t - 3 = 0$ , 解得  $t=1$  或  $t=-3$ , 当  $t=1$  时, 解得  $k=0$ , 此时  $b=1$ , 直线方程为  $y=1$ ; 当  $t=-3$  时,  $\sqrt{1+k^2} = 3$ , 解得  $k = \pm 2\sqrt{2}$ , 当  $k=2\sqrt{2}$  时,  $b = -3 - 2\sqrt{2}$ ; 当  $k=-2\sqrt{2}$  时,  $b = -3 + 2\sqrt{2}$ , 所以直线方程为  $y = 2\sqrt{2}x - 3 - 2\sqrt{2}$  或  $y = -2\sqrt{2}x - 3 + 2\sqrt{2}$ .

15.  $\frac{8}{3}$  四棱锥的底面内接于圆, 当底面为正方形时, 底面面积最大 (论证如下: 设底面四边形  $ABCD$  的外接圆半径为  $r$ ,  $AC$  与  $BD$  的夹角为  $\alpha$ , 则四边形  $ABCD$  的面积  $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \alpha \leq \frac{1}{2} AC \cdot BD \leq \frac{1}{2} \times 2r \times 2r = 2r^2$ , 当且仅当四边形  $ABCD$  是正方形时, 四边形  $ABCD$  的面积取到最大值  $2r^2$ ) 要使四棱锥的体积最大, 则从顶点作底面的垂线过球心  $O$ . 该四棱锥为正四棱锥, 设底面的边长为  $a$ , 四棱锥的高为  $h$ , 底面外接圆的半径为  $r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a$ , 由题意可知,  $r^2 + (h-2)^2 = 4$ , 即  $\frac{1}{2} a^2 + (h-2)^2 = 4$ , 所以  $a^2 = 2(4h - h^2)$ , 则  $0 < h < 4$ , 四棱锥的体积为  $V = \frac{1}{3} a^2 \times h = \frac{2}{3} (4h^2 - h^3)$ , 令  $f(x) = 4x^2 - x^3 (0 < x < 4)$ , 则  $f'(x) = 8x - 3x^2$ , 由  $f'(x) = 0$ , 得  $x = \frac{8}{3}$ , 由  $x \in (0, \frac{8}{3})$ , 得  $f'(x) > 0$ , 由  $x \in (\frac{8}{3}, 4)$ , 得  $f'(x) < 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(0, \frac{8}{3})$  上单调递增, 在  $(\frac{8}{3}, 4)$  上单调递减, 则当  $x = \frac{8}{3}$  时,  $f(x)$  取得极大值, 也就是最大值, 此时  $h = \frac{8}{3}$ .

16.  $\frac{\pi}{6} \left[ \frac{n(n+1)}{2} + \frac{3n+4}{9} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{4}{9} \right]$  易知  $S_1 = \frac{1}{2} \times \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} \pi$ , 在第  $n$  个图中, 从第 2 个半圆起, 每个半圆的面



积为前一个半圆面积的  $\frac{1}{4}$ ,

$$\text{则 } S_n = \left[ 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right] S_1 = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} S_1 = \frac{\pi}{6} \left[ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right].$$

$$\sum_{i=1}^n i S_i = 1 \times S_1 + 2 \times S_2 + \dots + n \times S_n = \frac{\pi}{6} \left[ 1 + 2 + \dots + n - \frac{1}{4} - 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \dots - n \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \right]$$

$$= \frac{\pi}{6} \left[ \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{4} - 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \dots - n \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \right].$$

$$\text{设 } T_n = \frac{1}{4} + 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + (n-1) \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + n \times \left(\frac{1}{4}\right)^n, \text{ ①}$$

$$\frac{1}{4} T_n = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots + (n-1) \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + n \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}. \text{ ②}$$

$$\text{由 ①} - \text{② 得, } \frac{3}{4} T_n = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n - n \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{1}{4} \left[ \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} \right] - n \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = \frac{1}{3} \left[ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right] - n \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}.$$

$$\text{所以 } T_n = \frac{4}{9} \left[ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right] = \frac{n}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4}{9} - \frac{3n-4}{9} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

$$\text{故 } \sum_{i=1}^n i S_i = \frac{\pi}{6} \left[ \frac{n(n+1)}{2} - \frac{3n-4}{9} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{4}{9} \right].$$

17. (1) 证明: 由题知,  $(\sin B \cos C - \cos B \sin C) \frac{\sin A}{\cos A} = \sin B \sin C$ ,

所以  $\sin A \sin B \cos C - \sin C (\sin B \cos A + \cos B \sin A)$ ,

则  $\sin A \sin B \cos C = \sin C \sin (A+B) = \sin^2 C$ ,

由正弦定理得,  $ab \cos C = c^2$ , ..... 3分

由余弦定理得,  $ab \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = c^2$ ,

整理得,  $3c^2 = a^2 + b^2$ ,  $\frac{a^2 + b^2}{c^2} = 3$ ,

故  $\frac{a^2 + b^2}{c^2}$  为定值, 得证. .... 6分

(2) 解: 由  $c = \sqrt{3}$ ,  $\cos C = \frac{3}{4}$  及余弦定理可知,  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ ,

又  $3c^2 = a^2 + b^2$ , 所以  $c^2 = 3c^2 - \frac{3}{2} ab$ , 则  $c^2 = \frac{3}{4} ab$ . .... 9分

又  $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 3c^2 + \frac{8c^2}{3} = \frac{17c^2}{3} = 17$ , 所以  $a+b = \sqrt{17}$ ,

故  $\triangle ABC$  的周长为  $\sqrt{3} + \sqrt{17}$ . .... 12分

18. 解: (1) 由频率分布表可知,  $m = 1 - 0.15 - 0.25 - 0.30 - 0.10 = 0.20$ . .... 2分

这 200 份问卷得分的平均值估计为  $55 \times 0.15 + 65 \times 0.25 + 75 \times 0.20 + 85 \times 0.30 + 95 \times 0.10 = 74.5$ . .... 4分

(2) 从该校学生中随机抽取 1 人, 此人得分在  $[70, 100]$  的概率为  $\frac{3}{5}$ .

由题意可知,  $X \sim B(4, \frac{3}{5})$ ,  $X$  的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 4. .... 5分

$$P(X=0) = C_4^0 \left(1 - \frac{3}{5}\right)^4 \left(\frac{3}{5}\right)^0 = \frac{16}{625}, P(X=1) = C_4^1 \left(1 - \frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{3}{5}\right)^1 = \frac{96}{625},$$

$$P(X=2) = C_4^2 \left(1 - \frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{216}{625}, P(X=3) = C_4^3 \left(1 - \frac{3}{5}\right) \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{216}{625},$$

$$P(X=4) = C_4^4 \left(1 - \frac{3}{5}\right)^0 \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625}.$$

所以  $X$  的分布列为

$X$	0	1	2	3	4
$P$	$\frac{16}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{81}{625}$

所以  $E(X) = 0 \times \frac{16}{625} + 1 \times \frac{96}{625} + 2 \times \frac{216}{625} + 3 \times \frac{216}{625} + 4 \times \frac{81}{625} = \frac{12}{5}$ . ..... 16分

(或  $E(X) = 1 \times \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$ ). ..... 12分

19. (1) 证明: 连结  $BD$ .

因为  $PD \perp$  底面  $ABCD$ ,  $BC \subset$  平面  $ABCD$ , 所以  $PD \perp BC$ . ..... 1分

因为  $AB \perp AD$ ,  $AB=4$ ,  $AD=\sqrt{2}$ , 所以  $BD^2 = AD^2 + AB^2 = 18$ .

又  $BC=2\sqrt{3}$ ,  $CD=\sqrt{6}$ ,

所以  $BD^2 = CD^2 + BC^2$ , 则  $BC \perp CD$ . ..... 2分

又  $PD \cap CD = D$ ,  $PD \subset$  平面  $PCD$ ,  $CD \subset$  平面  $PCD$ ,

所以  $BC \perp$  平面  $PCD$ . ..... 3分

又  $BC \subset$  平面  $PBC$ , 故平面  $PCD \perp$  平面  $PBC$ . ..... 4分

(2) 解: 延长  $AD$  与过  $C$  且平行于  $AB$  的直线交于点  $E$ ,

设  $DE=a$ ,  $CE=b$  ( $a, b > 0$ ), 则  $a^2 + b^2 = 6$ ,

过  $C$  作  $CF \perp AB$ , 则  $CF = a + \sqrt{2}$ ,  $BF = 4 - b$ , 所以  $(a + \sqrt{2})^2 + (4 - b)^2 = 12$ ,

联立解得  $\begin{cases} a = \frac{5\sqrt{2}}{3} \\ b = \frac{2}{3} \end{cases}$  (舍去), 或  $\begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = 2 \end{cases}$ . ..... 6分

以  $D$  为坐标原点, 以  $DA, DP$  所在直线分别为  $x$  轴,  $z$  轴, 以过  $D$  点且平行于  $AB$  的直线为  $y$  轴, 建立如图所示的空间直角坐标系  $D-xyz$ .

则  $A(\sqrt{2}, 0, 0)$ ,  $B(\sqrt{2}, 4, 0)$ ,  $P(0, 0, 4)$ ,  $C(-\sqrt{2}, 2, 0)$ .

所以  $\vec{AB} = (0, 4, 0)$ ,  $\vec{PB} = (\sqrt{2}, 4, -4)$ ,  $\vec{BC} = (-2\sqrt{2}, -2, 0)$ , ..... 8分

设平面  $PAB$  的一个法向量为  $m = (x_1, y_1, z_1)$ ,

由  $\begin{cases} \vec{PB} \cdot m = 0, \\ \vec{AB} \cdot m = 0, \end{cases}$  得  $\begin{cases} \sqrt{2}x_1 + 4y_1 - 4z_1 = 0, \\ 4y_1 = 0, \end{cases}$  取  $z_1 = 1$ , 则  $m = (2\sqrt{2}, 0, 1)$ . ..... 9分

设平面  $PBC$  的一个法向量为  $n = (x_2, y_2, z_2)$ ,

由  $\begin{cases} \vec{PB} \cdot n = 0, \\ \vec{BC} \cdot n = 0, \end{cases}$  得  $\begin{cases} \sqrt{2}x_2 + 4y_2 - 4z_2 = 0, \\ 2\sqrt{2}x_2 + 2y_2 = 0, \end{cases}$  取  $x_2 = \sqrt{2}$ , 则  $n = (\sqrt{2}, -2, -\frac{3}{2})$ . ..... 10分

于是  $\cos \langle m, n \rangle = \frac{m \cdot n}{|m| \cdot |n|} = \frac{\frac{5}{2}}{3 \times \frac{\sqrt{33}}{2}} = \frac{5\sqrt{33}}{99}$ .

故二面角  $A-PB-C$  的余弦值为  $\frac{5\sqrt{33}}{99}$ . ..... 12分

20. 解: (1) 设  $E$  的方程为  $sx^2 + ty^2 = 1$  ( $s > 0, t > 0, s \neq t$ ),

由题意可知,  $\begin{cases} s = 1, \\ \frac{s}{2} = t - 1, \end{cases}$  解得  $s = 1, t = \frac{1}{2}$ . ..... 2分

故  $E$  的方程为  $\frac{y^2}{2} + x^2 = 1$ . ..... 3分



(2)由椭圆的对称性,不妨设  $F$  为下焦点,则  $F(0, -1)$ , 所以  $\vec{AF} = (1, -1)$ ,

因为  $\vec{MN} \cdot \vec{AF} = 0$ , 所以直线  $MN$  的斜率为 1.

设直线  $MN$  的方程为  $y = x + m (m \neq 0)$ ,  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ , ..... 1分

$$\text{由} \begin{cases} \frac{y^2}{2} + x^2 = 1, \\ y = x + m, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 并整理得 } 3x^2 - 2mx + m^2 - 2 = 0.$$

则  $\Delta = 4m^2 - 4 \times 3 \times (m^2 - 2) - 8(3 - m^2) > 0$ , 所以  $m^2 < 3$  且  $m \neq 0$ . ..... 6分

$$x_1 + x_2 = -\frac{-2m}{3}, x_1 x_2 = \frac{m^2 - 2}{3},$$

$$\text{所以 } |MN| = \sqrt{1+1^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{2} \times \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} \\ = \sqrt{2} \times \sqrt{\left(-\frac{2m}{3}\right)^2 - 4 \times \frac{m^2 - 2}{3}} = \frac{4\sqrt{3-m^2}}{3}. \text{ ..... 8分}$$

原点  $O$  到直线  $MN$  的距离为  $d = \frac{|m|}{\sqrt{2}}$ . ..... 9分

$$\text{则 } \triangle MON \text{ 的面积为 } S_{\triangle MON} = \frac{1}{2} \times |MN| \times d = \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{3-m^2}}{3} \times \frac{|m|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{m^2(3-m^2)} \leq \frac{\sqrt{2}}{3} \times m^2 + \frac{(3-m^2)\sqrt{2}}{2}.$$

当且仅当  $m^2 = \frac{3}{2}$ , 即  $m = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$  时,  $\triangle MON$  的面积最大. .... 11分

显然  $m = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$  满足  $m^2 < 3$  且  $m \neq 0$ .

所以  $\triangle MON$  的面积的最大值为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . ..... 12分

21. 解:(1)易知  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,  $f'(x) = \frac{a}{x} + \frac{4}{x^3} - \frac{a}{x^2} = \frac{ax^2 - ax + 4}{x^3}$ . ..... 1分

当  $a < 0$  时, 由  $f'(x) = 0$ , 得  $ax^2 - ax + 4 = 0$ , 由  $\Delta = a^2 - 16a > 0$ , 解得  $x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 16a}}{2a} > 0$ ,  $x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 16a}}{2a} < 0$  (舍去).

$x \in (0, x_1)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $x \in (x_1, +\infty)$  时,  $f'(x) < 0$ .

所以  $f(x)$  在  $(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 16a}}{2a})$  上单调递增, 在  $(\frac{a - \sqrt{a^2 - 16a}}{2a}, +\infty)$  上单调递减. .... 2分

当  $a = 0$  时,  $f'(x) > 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增. .... 3分

当  $0 < a \leq 16$  时,  $f'(x) \geq 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增. .... 4分

当  $a > 16$  时, 由  $f'(x) = 0$ , 得  $x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 16a}}{2a}$ ,  $x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 16a}}{2a}$ .

$x \in (0, x_1) \cup (x_2, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $x \in (x_1, x_2)$  时,  $f'(x) < 0$ .

所以  $f(x)$  在  $(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 16a}}{2a})$  上单调递增, 在  $(\frac{a - \sqrt{a^2 - 16a}}{2a}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 16a}}{2a})$  上单调递减, 在  $(\frac{a + \sqrt{a^2 - 16a}}{2a}, +\infty)$  上单调递增. .... 5分

(2)由(1)可知,  $a > 16$ .

$x_1, x_2$  是方程  $ax^2 - ax + 4 = 0$  的两根, 则  $x_1 + x_2 = 1, x_1 x_2 = \frac{4}{a}$ . ..... 6分

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{a(\ln x_2 - \ln x_1) + \frac{2}{x_1^3} - \frac{2}{x_2^3} + \frac{a}{x_2} - \frac{a}{x_1}}{x_2 - x_1} = \frac{a(\ln x_2 - \ln x_1) + \frac{2(x_2^3 - x_1^3)}{x_1^3 x_2^3} + \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 x_2}}{x_2 - x_1}$$

将  $x_1 + x_2 = 1, x_1 x_2 = \frac{4}{a}$  代入上式可得  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{a(\ln x_2 - \ln x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{a^2}{8}$ . ..... 7分

要证明  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{1}{2} a^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8} a^2$ , 需证  $\frac{a(\ln x_2 - \ln x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{1}{2} a^{\frac{3}{2}}$ .

即证  $\frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} < \frac{\sqrt{a}}{2} = \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}}$ . ..... 8分

因为  $0 < x_1 < x_2$ , 所以  $x_2 - x_1 > 0$ , 只需证明  $\ln \frac{x_2}{x_1} < \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_1 x_2}} = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} - \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$ .

设  $\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} = t$ , 则  $t > 1$ , 只需证明  $\ln t^2 < t - \frac{1}{t}$ , 即证  $2 \ln t - t + \frac{1}{t} < 0 (t > 1)$ . ..... 16分

令  $g(t) = 2 \ln t - t + \frac{1}{t} (t > 1)$ , 则  $g'(t) = \frac{2}{t} - 1 - \frac{1}{t^2} = -\frac{(t-1)^2}{t^2} < 0$ ,

所以  $g(t)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减, 可得  $g(t) < 2 \ln 1 - 1 + \frac{1}{1} = 0$ , 所以  $2 \ln t - t + \frac{1}{t} < 0 (t > 1)$ ,

故  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{1}{2} a^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8} a^2$ . ..... 12分

22. 解: (1) 因为  $x = \frac{1}{2} \left( 3^t + \frac{1}{3^t} \right) \geq 1$ , 且  $x^2 = \frac{1}{4} \left( 3^{2t} + \frac{1}{3^{2t}} + 2 \right)$ ,  $y^2 = 3^{2t} + \frac{1}{3^{2t}} - 2$ . ..... 2分

所以  $4x^2 - y^2 = 4$ , 则曲线  $C$  的普通方程为  $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1 (x \geq 1)$ . ..... 5分

(2) 由  $m \cos \theta + \rho \sin \theta - 1 = 0$ , 化为直角坐标方程为  $mx + y - 1 = 0$ . ..... 6分

由  $\begin{cases} mx + y - 1 = 0, \\ x^2 - \frac{y^2}{4} = 1, \end{cases}$  消去  $y$  并整理得  $(4 - m^2)x^2 + 2mx - 5 = 0$ . ..... 8分

则  $\begin{cases} 4 - m^2 \neq 0, \\ \Delta = 4m^2 + 20(4 - m^2) > 0, \\ \frac{2m}{4 - m^2} > 0, \\ -\frac{5}{4 - m^2} > 0, \end{cases}$  解得  $2 < m < \sqrt{5}$ .

故  $m$  的取值范围为  $(2, \sqrt{5})$ . ..... 10分

23. 解: (1)  $f(x) = \begin{cases} -2x - \frac{1}{2}, & x < -1, \\ \frac{3}{2}, & -1 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2x + \frac{1}{2}, & x > \frac{1}{2}. \end{cases}$  ..... 2分

当  $x < -1$  时, 由  $-2x - \frac{1}{2} \leq 3$ , 得  $-\frac{7}{4} \leq x < -1$ ;

当  $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$  时,  $f(x) \leq 3$  恒成立;

当  $x > \frac{1}{2}$  时, 由  $2x + \frac{1}{2} \leq 3$ , 得  $\frac{1}{2} < x \leq \frac{5}{4}$ .

综上,  $f(x) \leq 3$  的解集为  $\left\{ x \mid -\frac{7}{4} \leq x \leq \frac{5}{4} \right\}$ . ..... 5分

(2) 因为对任意  $x_1 \in \mathbf{R}$ , 都存在  $x_2 \in \mathbf{R}$ , 使得  $f(x_1) = g(x_2)$ ,

所以  $\{y \mid y = f(x)\} \subseteq \{y \mid y = g(x)\}$ . ..... 6分

又  $f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right| + |x + 1| \geq \left| x - \frac{1}{2} - (x + 1) \right| = \frac{3}{2}$ ,  $g(x) = |x - a| + |x - 2| \geq |a - 2|$ , 等号都能取到, ..... 8分

所以  $\frac{3}{2} \geq |a - 2|$ , 解得  $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{7}{2}$ .

所以实数  $a$  的取值范围是  $\left[ \frac{1}{2}, \frac{7}{2} \right]$ . ..... 10分

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线