

深圳外国语学校 2023 届高三第一次月考试题

数 学

本试卷分选择题和非选择题两部分，共 4 页，满分 150 分，考试用时 120 分钟。

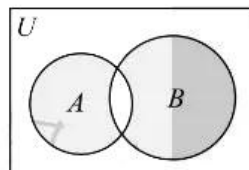
注意事项：

1. 答题前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名、班级、座位号等相关信息填写在答题卷指定区域内。
2. 选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卷上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案；不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卷各题目指定区域内的相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。
4. 考生必须保持答题卷的整洁

第一部分 选择题（共 60 分）

一、单选题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的）

1. 已知全集  $U = \mathbb{R}$ ，集合  $A = \{x | x \geq 4 \text{ 或 } x \leq 0\}$ ， $B = \{x | x > 4 \text{ 或 } x \leq -2\}$ ，则图



中阴影部分表示的集合为（ ）

- A.  $(-2, 0]$       B.  $[-2, 0]$       C.  $[-2, 0] \cup \{4\}$       D.  $(-2, 0] \cup \{4\}$

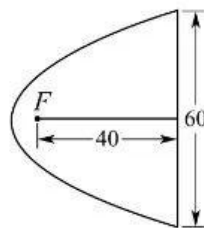
2. 若复数  $z$  所对应的点在第四象限，且满足  $z^2 - 2z + 2 = 0$ ，则  $z^2 =$ （ ）

- A.  $1+i$       B.  $1-i$       C.  $-2i$       D.  $2i$

3. 已知  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -24$ ， $\vec{a} + 2\vec{b} = (-5, 2)$ ，若  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  模相等，则  $|\vec{a}| =$ （ ）。

- A. 3      B. 4      C. 5      D. 6

4. 探照灯反射镜的纵断面是抛物线的一部分，光源放在焦点  $F$  处。已知灯口直径为  $60\text{cm}$ ，光源距灯口的深度为  $40\text{cm}$ ，则光源到反射镜的顶点的距离为



- A.  $5\text{cm}$       B.  $10\text{cm}$       C.  $15\text{cm}$       D.  $20\text{cm}$

5. 设函数  $f(x) = (a-1)x|x-b+1|$  为奇函数且在  $\mathbb{R}$  上为减函数，则关于  $a, b$  的值表述正确的是（ ）

- A.  $a > 1, b = 1$       B.  $a > 1, b < 1$       C.  $a < 1, b = 1$       D.  $a < 1, b > 1$

6. 定义函数迭代：

$$f^{(0)}(x) = x$$

$$f^{(1)}(x) = f(x)$$

$$f^{(2)}(x) = f(f(x))$$

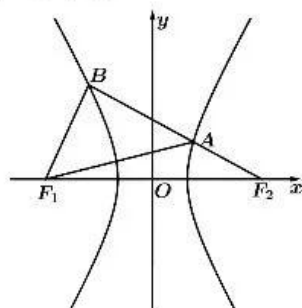
...

$$f^{(n+1)}(x) = f(f^{(n)}(x))$$

已知  $f(x) = 3x + 2$ , 则  $f^{(n)}(x) = ( )$

- A.  $3^n x + 3^n - 1$     B.  $3^n x + 3^n + 1$     C.  $3nx + 3n - 1$     D.  $3^n x - 3^n + 1$

7. 如图,  $F_1, F_2$  是双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点, 过  $F_2$  的直线与双曲线  $C$  交于  $A, B$  两点, 若  $A$  是  $BF_2$  中点且  $BF_1 \perp BF_2$  则该双曲线的渐近线方程为 ( )



- A.  $y = \pm 2\sqrt{3}x$     B.  $y = \pm 2\sqrt{2}x$   
C.  $y = \pm \sqrt{3}x$     D.  $y = \pm \sqrt{2}x$

8. 若  $\exists m \in \mathbb{R}$ , 对于  $\forall x \in [a, b]$  恒有  $2m^2 - 2\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) \cdot m + \sin 2x \leq 0$ , 则  $b - a$  的最大值是 ( )

- A.  $\frac{3\pi}{4}$     B.  $\pi$     C.  $\frac{4\pi}{3}$     D.  $2\pi$

二、多选题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分)

9. 已知函数  $f(x)$  和  $g(x)$  分别为奇函数和偶函数, 且  $f(x) + g(x) = 2^x$ , 则 ( )

- A.  $f(x) - g(x) = 2^{-x}$     B.  $f(x)$  在定义域  $(-\infty, +\infty)$  上单调递增  
C.  $f(x)$  的导函数  $f'(x) \geq 1$     D.  $g(x) \geq 1$

10. 给出下列说法, 其中正确的是 ( )

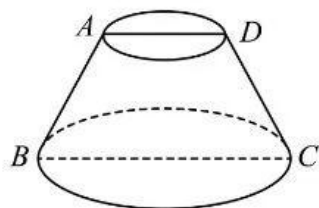
- A. 数据 0, 1, 2, 4 的极差与中位数之积为 6  
B. 已知一组数据  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的方差是 5, 则数据  $4x_1 - 1, 4x_2 - 1, \dots, 4x_n - 1$  的方差是 20  
C. 已知一组数据  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的方差为 0, 则此组数据的众数唯一  
D. 已知一组不完全相同的数据  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的平均数为  $x_0$ , 在这组数据中加入一个数  $x_0$  后得到一组新数据  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ , 其平均数为  $\bar{x}$ , 则  $\bar{x} = x_0$

11. 已知函数  $f(x)$  定义域为  $\mathbb{R}$ ,  $f(x+1)$  是奇函数,  $g(x) = (1-x)f(x)$ , 函数  $g(x)$  在  $[1, +\infty)$  上递增, 则下列命题为真命题的是 ( )

- A.  $f(-x-1) = -f(x+1)$     B. 函数  $g(x)$  在  $(-\infty, 1]$  上递减  
C. 若  $a < 2 - b < 1$ , 则  $g(1) < g(b) < g(a)$     D. 若  $g(a) > g(a+1)$ , 则  $a < \frac{1}{2}$

12. 如图  $AD$  与  $BC$  分别为圆台上下底面直径,  $AD \parallel BC$ , 若  $AB = 3$ ,  $AD = 2$ ,  $BC = 4$ , 则 ( )

- A. 圆台的母线与底面所成的角的正切值为  $2\sqrt{2}$   
 B. 圆台的全面积为  $14\pi$   
 C. 圆台的外接球 (上下底面圆周都在球面上) 的半径为  $\sqrt{2}$   
 D. 从点  $A$  经过圆台的表面到点  $C$  的最短距离为  $3\sqrt{3}$



## 第二部分 非选择题 (90 分)

三、填空题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 钥匙掉了, 掉在宿舍里、掉在教室里、掉在路上的概率分别是 50%、30% 和 20%, 而掉在上述三处被找到的概率分别是 0.8、0.3 和 0.1, 则找到钥匙的概率为 \_\_\_\_\_.
14. 已知圆柱体的底面半径为  $\frac{3}{2}$  cm, 高为  $5\pi$  cm, 一只蜗牛从圆柱体底部开始爬行, 绕圆柱体 4 圈到达顶部, 则蜗牛爬行的最短路径长为 \_\_\_\_\_.
15. 测量地震级别的里氏是地震强度 (即地震释放的能量) 的常用对数值. 显然级别越高, 地震的强度也越高, 如日本 1923 年地震是 8.9 级, 旧金山 1906 年地震是 8.3 级, 问日本 1923 年地震强度是 8.3 级的 \_\_\_\_\_ 倍. ( $\lg 2 \approx 0.3$ )
16. 已知椭圆  $E$  的中心为  $O$ ,  $E$  上存在两点  $A, B$ , 满足  $\triangle OAB$  是以半焦距为边长的正三角形, 则  $E$  的离心率为 \_\_\_\_\_.

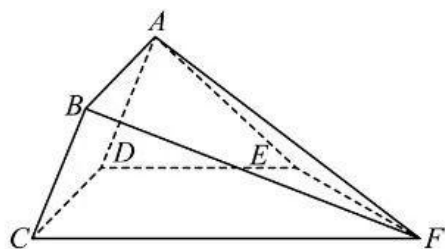
四、解答题 (本题共 6 小题, 共 70 分, 其中 17 题 10 分, 其余各题 12 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$ ,  $\frac{a_{n+1}}{3a_n} = 1 + \frac{1}{n}$ .

- (1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;  
 (2) 求数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

18. 如图, 多面体  $ABCDEF$  中, 四边形  $ABCD$  为矩形, 二面角  $A-CD-F$  的大小为  $45^\circ$ ,  $DE \parallel CF$ ,  $CD \perp DE$ ,  $AD = 2$ ,  $DC = 3$ .

- (1) 求证:  $BF \parallel$  平面  $ADE$ ;  
 (2) 求直线  $AC$  与平面  $CDEF$  所成角的正弦值.

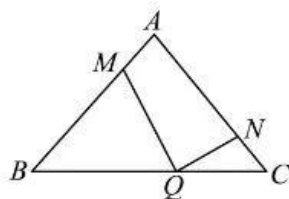


19. 已知抛物线  $C$  的焦点  $F$  到准线  $l$  的距离为 2.

- (1) 求抛物线的标准方程;  
 (2) 过焦点  $F$  的直线 (斜率存在且不为 0) 交抛物线  $C$  于  $A, B$  两点, 线段  $AB$  的中垂线交抛物线的对称轴于点

$P$ , 求  $\frac{|FP|}{|AB|}$ .

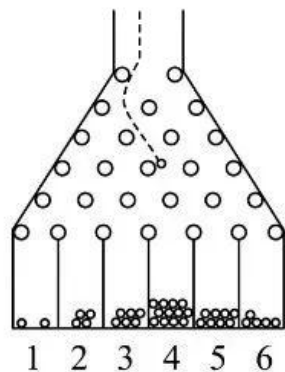
20. 如图, 某景区绿化规划中, 有一块等腰直角三角形空地  $ABC$ ,  $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ ,  $BC = 30\text{m}$ ,  $Q$  为  $BC$  上一点, 满足  $BQ = 2CQ$ . 现欲在边界  $AB$ ,  $AC$  (不包括端点) 上分别选取  $M$ ,  $N$  两点, 并在四边形  $AMQN$  区域内种植花卉, 且  $\angle MQN = \frac{\pi}{2}$ , 设  $\angle NQC = \theta$ .



(1) 证明:  $\frac{QM}{QN} = 2$ ;

(2)  $\tan\theta$  为何值时, 花卉种植的面积占整个空地面积的一半?

21. 高尔顿板又称豆机、梅花机等, 是英国生物统计学家高尔顿设计用来研究随机现象的模型. 如图所示的高尔顿板为一块木板自上而下钉着 6 层圆柱形小木块, 最顶层有 2 个小木块, 以下各层小木块的个数依次递增, 各层小木块互相平行但相互错开, 小木块之间留有适当的空隙作为通道, 前面挡有一块透明玻璃. 让小球从高尔顿板上方的通道口落下, 小球在下落过程中与层层小木块碰撞, 且等可能向左或者向右滚下, 最后落入高尔顿板下方从左至右编号为 1, 2, ..., 6 的球槽内.



(1) 某商店将该高尔顿板改良成游戏机, 针对某商品推出促销活动. 凡是入店购买该商品一件, 就可以获得一次游戏机会. 若小球落入  $X$  号球槽, 该商品可立减  $Y$  元, 其中  $Y = |20 - 5X|$ . 若该商品的成本价是 10 元, 从期望的角度考虑, 为保证该商品总体能盈利, 求该商品的最低定价. (结果取整数)

(2) 将 79 个小球依次从高尔顿板上方的通道口落下, 试问 3 号球槽中落入多少个小球的概率最大?

附: 设随机变量  $\xi \sim B(n, p)$ , 则  $\xi$  的分布列为  $P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .

$$\frac{P(\xi=k)}{P(\xi=k-1)} = \frac{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}{C_n^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k+1}} = 1 + \frac{(n+1)p-k}{k(1-p)}.$$

22. 设函数  $f(x) = -x \ln x + ax^2 + x (a \in \mathbb{R})$ .

(1) 若函数  $f(x)$  有两个不同的极值点, 求实数  $a$  的取值范围;

(2) 若  $a = 1, k \in \mathbb{N}^+$ ,  $g(x) = x^2 + 2x$ , 当  $x > 2$  时, 不等式  $2k(x-2) + f(x) < g(x)$  恒成立, 试求正整数  $k$  的最大值.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (网址: [www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主选拔在线**官方微信号: **zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线