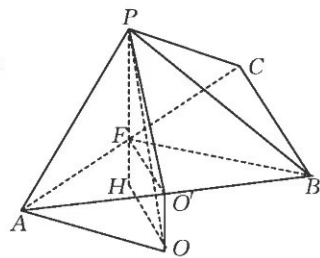


2022~2023 年度河南省高三年级模拟考试 数学参考答案(理科)

1. A 因为 $A=\{x|-3\leq x\leq 3\}$, $B=\{x|x\leq -2a\}$, $A\cap B=\{x|-3\leq x\leq 2\}$, 所以 $-2a=2$, 解得 $a=-1$.
2. B 因为 $z=1-i$, 所以 $z^2=-2i$, 则 $|z^2+3-2i|=|3-4i|=5$.
3. C 因为 $a\parallel b$, 所以 $2x+4=9x-3$, 解得 $x=1$.
4. D 对于 A, $f(x)$ 为非奇非偶函数, 故不满足题意.
对于 B, $f(x)$ 为 $(-2, 2)$ 上的奇函数, 且 $f(x)$ 为减函数, 故不满足题意.
对于 C, 因为 $f(-x)=\frac{e^{-x}+e^x}{2}=f(x)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数, 故不满足题意.
对于 D, 因为 $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}=1-\frac{2}{2^x+1}$, 所以 $f(x)$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 内单调递增,
又 $f(-x)=\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\frac{1-2^x}{1+2^x}=-f(x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函数, 故满足题意.
5. C 圆台的体积 $V=\frac{1}{3}h(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)=\frac{1}{3}\times 6\times(3\pi+\sqrt{3\pi\times 12\pi}+12\pi)=42\pi$.
6. B $x^2(2x-\frac{1}{x})^5$ 的展开式中常数项为 $x^2\times C_5^3\times(2x)^2\times(-\frac{1}{x})^4=60$.
7. A 由题意设此人第一天走 a_1 里, 第 n 天走 a_n 里, $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_1=100$, 由 $S_9=900+36d=1260$, 可得 $d=10$, 则 $a_3=100+20=120$, $S_n=100n+\frac{n(n-1)}{2}\times 10=5n^2+95n$, 所以 $S_7=910$, $S_8=1080$.
8. D 因为 $y=\cos(2x+\varphi)=\sin[\frac{\pi}{2}+(2x+\varphi)]=\sin(2x+\frac{\pi}{2}+\varphi)$, 其图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后对应的函数 $g(x)=\sin[2(x-\frac{\pi}{12})+\frac{\pi}{2}+\varphi]=\sin(2x+\frac{\pi}{3}+\varphi)$, 所以 $\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi, k\in\mathbf{Z}$, 得 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$, 即 $f(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{3})$, 则 $2k\pi\leq 2x-\frac{\pi}{3}\leq 2k\pi+\pi, k\in\mathbf{Z}$, 所以单调递减区间为 $[k\pi+\frac{\pi}{6}, k\pi+\frac{2\pi}{3}] (k\in\mathbf{Z})$.
9. A 依题意得 50 以内的质数有 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 共 15 个数, 50 以内的梅森数有 $2^2-1=3, 2^3-1=7, 2^5-1=31$, 共 3 个数, 所以从 50 以内的质数中任取两个数, 则这两个数都为梅森数的概率 $P=\frac{C_3^2}{C_{15}^2}=\frac{1}{35}$, 故选 A.
10. D 因为 $MN\perp FN$, 所以 $\vec{FM}\cdot\vec{FN}=|\vec{FN}|^2=|\vec{FM}|^2-1$, 又 $|\vec{FM}|\geq|\vec{FO}|=3$, O 为原点, 所以 $\vec{FM}\cdot\vec{FN}\geq 3^2-1=8$.
11. D 两式相减得 $a_{2n-1}+a_{2n+1}=6, a_{2n}+a_{2n+2}=(3^n-1+a_{2n-1})+(3^{n+1}-1+a_{2n+1})=4\times 3^n+4$,
 $S_{40}=(a_1+a_3+\cdots+a_{37}+a_{39})+(a_2+a_4+\cdots+a_{38}+a_{40})=6\times 10+4\times 10+4\times(3^1+3^3+\cdots+3^{19})=\frac{3^{21}+197}{2}$.
12. B 不等式 $me^{mx}\geq \ln x$ 恒成立, 即 $e^{mx}\geq \frac{\ln x}{m}$ 恒成立. 因为曲线 $y=e^{mx}$ 关于直线 $y=x$ 对称的曲线是 $y=\frac{\ln x}{m}$, 所以只需 $\frac{\ln x}{m}\leq x$, 即 $m\geq \frac{\ln x}{x}$. 令 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$, 则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, $g(x)\leq g(e)=\frac{1}{e}$, 所以 $m\geq \frac{1}{e}$.
13. 5 画出可行域(图略)知, 当直线 $z=2x+y$ 过点 $(2, 1)$ 时, z 取得最大值 5.
14. $(-\infty, \frac{1}{2})$ 因为 $f(x)=2^x-\frac{1}{x+1}$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 因为 $f(3x-1)<$

$f(1-x)$, 所以 $3x-1 < 1-x$, 解得 $x < \frac{1}{2}$.

15. 20π 分别取 AB, AC 的中点 O', F , 连接 $O'F, O'P, PF, BF$. 由题意可知 O' 为直角三角形 ABC 斜边的中点. 因为 $O'P = \sqrt{2} < O'A$, 所以三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心在平面 ABC 的下方. 设三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心为 O , 连接 OO', OP, OA , 作 $OH \perp PF$, 垂足为 H . 由题中数据可得 $PF=1, OH=O'F=1, O'A=2, HF=OO'$. 设三棱锥 $P-ABC$ 外接球的半径为 R , 则 $R^2 = O'A^2 + O'O^2 = OH^2 + (PF+O'O)^2$, 解得 $R^2=5$, 故三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积是 $4\pi R^2 = 20\pi$.



16. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 设 $|F_1F_2|=2c, |AF_1|=m, |AF_2|=n$ (不妨设 $m > n$), 椭圆 C_1 的长半轴长为 a_1 , 双曲线 C_2 的实半轴长为 a_2 , 则 $\begin{cases} m+n=2a_1 \\ m-n=2a_2 \end{cases}$, 所以 $mn=a_1^2-a_2^2$. 在 $\triangle F_1MF_2$ 中, 由 $\angle F_1MF_2 = \frac{\pi}{4}$, 得 $m^2+n^2-\sqrt{2}mn=4c^2$, 整理为 $(m+n)^2 - (2+\sqrt{2})mn = 4c^2$, 所以 $(2-\sqrt{2})a_1^2 + (2+\sqrt{2})a_2^2 = 4c^2$, 方程两边同时除以 c^2 , 得 $\frac{2-\sqrt{2}}{e_1^2} + \frac{2+\sqrt{2}}{e_2^2} = 4$. 由基本不等式得 $4 = \frac{2-\sqrt{2}}{e_1^2} + \frac{2+\sqrt{2}}{e_2^2} \geq \frac{2\sqrt{2}}{e_1e_2}$, 则 $e_1e_2 \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, 当且仅当 $e_1 = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}, e_2 = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$ 时, 等号成立.

17. 解: (1) 因为 $a(\sin A - \sin C) + c\sin C = b\sin B$,
所以 $a(a-c) + c^2 = b^2$, 2 分
整理得 $a^2 + c^2 - b^2 = ac$, 3 分
所以 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$, 5 分
又 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$ 6 分
(2) 由 (1) 知 $B = \frac{\pi}{3}$, 因为 $b=5$, 所以 $25 = a^2 + c^2 - 2ac \times \frac{1}{2} = (a+c)^2 - 3ac$ 8 分
又 $ac \leq (\frac{a+c}{2})^2 = \frac{(a+c)^2}{4}$, 所以 $25 \geq \frac{(a+c)^2}{4}$, 10 分
即 $a+c \leq 10$, 当且仅当 $a=c=5$ 时, 等号成立, 11 分
所以 $a+c+b \leq 15$, 即 $\triangle ABC$ 周长的最大值为 15. 12 分

18. 解: (1) 设抽取的 3 天生产的零件个数都不高于 39 为事件 A, 甲公司记录的 30 天中, 有 5+9=14 天生产的零件个数不高于 39, 2 分
则 $P(A) = \frac{C_{14}^3}{C_{30}^3} = \frac{13}{145}$ 4 分

- (2) 依题意, 甲公司员工的日平均生产零件个数为 $38 \times \frac{1}{6} + 39 \times \frac{3}{10} + 40 \times \frac{1}{6} + 41 \times \frac{1}{5} + 42 \times \frac{1}{6} = 39.9$, 5 分
所以甲公司员工的日平均工资为 $140 + 2 \times 39.9 = 219.8$ 元. 6 分
设乙公司员工一天生产的零件个数为 a , 日工资为 X (单位: 元),
当 $a=40$ 时, $X=40 \times 4 = 160$,
当 $a=41$ 时, $X=41 \times 4 = 164$, 7 分
当 $a=42$ 时, $X=42 \times 4 = 168$,
当 $a=43$ 时, $X=42 \times 4 + 1 \times 5 = 173$, 8 分
当 $a=44$ 时, $X=42 \times 4 + 2 \times 5 = 178$,
所以 X 的所有可能取值为 160, 164, 168, 173, 178. 9 分

故 X 的分布列为

X	160	164	168	173	178
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

..... 10 分

$$\text{所以 } E(X) = 160 \times \frac{1}{10} + 164 \times \frac{3}{10} + 168 \times \frac{1}{5} + 173 \times \frac{3}{10} + 178 \times \frac{1}{10} = 168.5,$$

乙公司员工的日平均工资为 168.5 元. 11 分

因为 $168.5 < 219.8$, 所以推荐小明去甲公司应聘. 12 分

19. (1) 证明: 连接 BD 交 AC 于点 F , 连接 FE 1 分

因为底面 $ABCD$ 是菱形, 所以 F 是 BD 的中点, 2 分

又 E 是 PD 的中点, 所以 $EF \parallel PD$, 3 分

因为 $EF \subset$ 平面 EAC , $PD \not\subset$ 平面 EAC ,

所以 $PD \parallel$ 平面 EAC 4 分

(2) 解: 取 AD 的中点 O , 连接 PO , 则 $PO \perp AD$. 因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 且平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$, 所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$ 5 分

又 $PA = PD = 3$, $AB = 2$, 所以 $PO = 2\sqrt{2}$.

因为底面 $ABCD$ 是菱形, $\angle ABC = 60^\circ$,

所以 $OC \perp AD$, 且 $OC = \sqrt{3}$ 6 分

以 O 为坐标原点, 以 OC, OD, OP 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系, 则 $A(0, -1, 0)$, $B(\sqrt{3}, -2, 0)$, $C(\sqrt{3}, 0, 0)$, $P(0, 0, 2\sqrt{2})$, $D(0, 1, 0)$, $E(0, \frac{1}{2}, \sqrt{2})$, $\vec{CE} = (-\sqrt{3}, \frac{1}{2}, \sqrt{2})$, $\vec{AP} = (0, 1, 2\sqrt{2})$, $\vec{AB} = (\sqrt{3}, -1, 0)$.

..... 8 分

设平面 PAB 的法向量为 $n = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{AP} \cdot n = y + 2\sqrt{2}z = 0, \\ \vec{AB} \cdot n = \sqrt{3}x - y = 0, \end{cases} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

令 $x = 4$, 得 $n = (4, 4\sqrt{3}, -\sqrt{6})$, 10 分

$$\text{则 } |\cos \langle \vec{CE}, n \rangle| = \frac{|\vec{CE} \cdot n|}{|\vec{CE}| |n|} = \frac{4\sqrt{10}}{35}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

故直线 EC 与平面 PAB 所成角的正弦值为 $\frac{4\sqrt{10}}{35}$ 12 分

20. 解: (1) 由题意得 $c = 2$, 1 分

将点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 的坐标代入方程 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 得 $\frac{2}{a^2} - \frac{3}{b^2} = 1$ 2 分

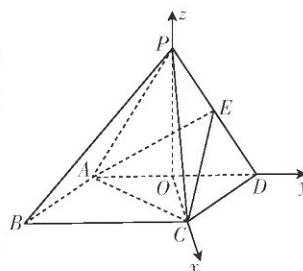
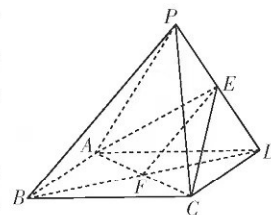
又因为 $c^2 = a^2 + b^2$, 所以 $\frac{2}{4-b^2} - \frac{3}{b^2} = 1$, 整理得 $b^4 + b^2 - 12 = 0$, 解得 $b^2 = 3$, 4 分

所以 $a^2 = 1$, 双曲线 C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 5 分

(2) 假设存在 $P(n, 0)$ 满足条件, 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

由题意知, 直线 AB 的斜率不为 0, 设直线 $AB: x = my + 2$,

$$\text{联立} \begin{cases} x = my + 2, \\ x^2 - \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases} \text{ 消去 } x \text{ 得 } (3m^2 - 1)y^2 + 12my + 9 = 0, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$



- 则 $3m^2 - 1 \neq 0, \Delta = (12m)^2 - 4 \times 9 \times (3m^2 - 1) = 36(m^2 + 1) > 0$,
- 且 $y_1 + y_2 = -\frac{12m}{3m^2 - 1}, y_1 y_2 = \frac{9}{3m^2 - 1}$ 7 分
- 因为点 F 到直线 PA, PB 的距离始终相等, 所以 PF 是 $\angle APB$ 的角平分线, 8 分
- 则 $k_{PA} + k_{PB} = 0$, 即 $\frac{y_1}{x_1 - n} + \frac{y_2}{x_2 - n} = 0$, 所以 $y_1(m y_2 + 2 - n) + y_2(m y_1 + 2 - n) = 0$,
- 整理得 $2m y_1 y_2 + (2 - n)(y_1 + y_2) = 0$ 9 分
- 所以 $\frac{2m \times 9}{3m^2 - 1} - \frac{(2 - n) \times 12m}{3m^2 - 1} = 0$, 整理得 $m(2n - 1) = 0$ 10 分
- 因为对于任意的 $m \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, m(2n - 1) = 0$ 恒成立, 所以 $n = \frac{1}{2}$,
- 故存在点 $P(\frac{1}{2}, 0)$, 使得点 F 到直线 PA, PB 的距离始终相等. 12 分
21. 证明: (1) $f'(x) = a e^{ax} - ax - 1$ 1 分
- 设 $g(x) = a e^{ax} - ax - 1, g'(x) = a^2 e^{ax} - a = a^2(e^{ax} - \frac{1}{a})$ 2 分
- 因为 $a \geq 1, x \geq 0$, 所以 $e^{ax} \geq 1, \frac{1}{a} \leq 1$, 所以 $e^{ax} - \frac{1}{a} \geq 0$,
- 所以 $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数, 3 分
- 所以 $f'(x) \geq f'(0) = a - 1 \geq 0$, 则 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数. 4 分
- 又 $f(0) = 0$, 所以 $f(x) \geq 0$ 5 分
- (2) 由 (1) 知, 当 $a = 1$ 时, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数, 且 $f(0) = 0$,
- 所以 $e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1 \geq 0$, 6 分
- 即 $e^x \geq \frac{1}{2}x^2 + x + 1 = \frac{x^2 + 2x + 2}{2} > \frac{(x+1)^2}{2}$ 8 分
- 所以 $x > 2\ln(x+1) - \ln 2$ 9 分
- 设 $x = \frac{1}{n}$, 得 $\frac{1}{n} > 2\ln \frac{n+1}{n} - \ln 2 = 2\ln(n+1) - 2\ln n - \ln 2$ 10 分
- 所以 $1 > 2\ln 2 - \ln 2$,
- $\frac{1}{2} > 2\ln 3 - 2\ln 2 - \ln 2$,
- $\frac{1}{3} > 2\ln 4 - 2\ln 3 - \ln 2$,
- ...
- $\frac{1}{n} > 2\ln(n+1) - 2\ln n - \ln 2$,
- 所以 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > 2\ln(n+1) - n\ln 2$, 即 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > 2\ln(n+1) - n\ln 2$ 12 分
22. 解: (1) 消去参数方程 $\begin{cases} x = \sqrt{3} + \sqrt{3}t, \\ y = 2 + t \end{cases}$ 中的参数, 得 $x - \sqrt{3}y + \sqrt{3} = 0$ 2 分
- 曲线 C 的极坐标方程 $\rho - \frac{5}{\rho} = 4\sin \theta$ 可化为 $\rho^2 - 5 = 4\rho \sin \theta$ 3 分
- 因为 $\rho^2 = x^2 + y^2, y = \rho \sin \theta$, 所以 $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$, 即曲线 C 的方程为 $x^2 + (y-2)^2 = 9$ 5 分
- (2) 由 (1) 得点 $A(0, 1)$ 在圆 C 内, 且 l 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以可设 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y = 1 + \frac{1}{2}t \end{cases}$ (t 为参数), 6 分



代入圆 $C: x^2 + (y-2)^2 = 9$, 得 $t^2 - t - 8 = 0$, 7 分

设点 M, N 对应的参数分别为 t_1, t_2 , 则 $t_1 + t_2 = 1, t_1 t_2 = -8$, 8 分

所以 $\frac{1}{|AM|^2} + \frac{1}{|AN|^2} = \frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_2^2} = \frac{t_1^2 + t_2^2}{t_1^2 t_2^2} = \frac{(t_1 + t_2)^2 - 2t_1 t_2}{t_1^2 t_2^2} = \frac{17}{64}$, 10 分

23. (1) 解: 由 $f(x) = |3x+1| - |2x-3|$, 得 $f(x) = \begin{cases} -x-4, & x < -\frac{1}{3}, \\ 5x-2, & -\frac{1}{3} \leq x < \frac{3}{2}, \\ x+4, & x \geq \frac{3}{2}, \end{cases}$ 2 分

所以 $f(x) \leq 1$ 等价于 $\begin{cases} -x-4 \leq 1, \\ x < -\frac{1}{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 5x-2 \leq 1, \\ -\frac{1}{3} \leq x < \frac{3}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+4 \leq 1, \\ x \geq \frac{3}{2}, \end{cases}$ 3 分

解得 $-5 \leq x \leq \frac{3}{5}$, 即不等式 $f(x) \leq 1$ 的解集为 $[-5, \frac{3}{5}]$ 5 分

(2) 证明: 要证 $f(x) + 4a + b \geq |x - \frac{3}{2}| + \frac{7}{2}$, 只需证 $4a + b - \frac{7}{2} \geq |2x-3| + |x - \frac{3}{2}| - |3x+1|$,

只需证 $4a + b - \frac{7}{2} \geq |3x - \frac{9}{2}| - |3x+1|$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 及任意的正数 a, b 都成立. 6 分

因为正数 a, b 满足 $a+b=ab$, 所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$,

所以 $4a+b = (4a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) = 5 + \frac{b}{a} + \frac{4a}{b} \geq 5 + 2\sqrt{4} = 9$, 当且仅当 $\begin{cases} a = \frac{3}{2}, \\ b = 3 \end{cases}$ 时, 等号成立, 所以 $4a+b - \frac{7}{2} \geq 9 - \frac{7}{2} = \frac{11}{2}$ 8 分

又因为 $|3x - \frac{9}{2}| - |3x+1| \leq |3x - \frac{9}{2} - 3x - 1| = \frac{11}{2}$, 9 分

所以 $4a+b - \frac{7}{2} \geq \frac{11}{2} \geq |3x - \frac{9}{2}| - |3x+1|$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 及任意的正数 a, b 都成立,

即对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 任意的正数 a, b , $f(x) + 4a + b \geq |x - \frac{3}{2}| + \frac{7}{2}$ 恒成立. 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线