绝密★考试结束前（暑假返校联考）

Z20名校联盟（浙江省名校新高考研究联盟）2023届高三第一次联考

数学试题卷

命题：海宁高级中学 方兰、杜海清　审题：路桥中学 朱映颖　新昌中学 赵洋　山东省 张志海　校稿：刘春苗

注意事项：

1. 答卷前，务必将自己的姓名，考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 请保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设全集为R，集合 $A=\{x|x^2-3x<0\}$，$B=\{x|x\le 1\}$，则 $A\cap(\complement_R B)=$

A. $\{x|0<x<1\}$　　B. $\{x|1<x<3\}$

C. $\{x|0<x<3\}$　　D. $\{x|x>3\}$

2. 若复数 $z=\dfrac{1-7i}{1+i}$，则

A. $|z|=5$　　B. 复数 z 在复平面上对应的点在第二象限

C. 复数 z 的实部与虚部之积为 -12　　D. $z=3+4i$

3. $\left(2x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中的常数项为

A. -60　　B. 60　　C. 64　　D. 120

4.《九章算术·商功》中，将四个面都是直角三角形的四面体称为鳖臑. 在鳖臑 $ABCD$ 中，$AB\perp$ 平面 BCD，$BC\perp CD$，且 $AB=1$，$BC=2$，$CD=3$，则四面体 $ABCD$ 外接球的表面积为

A. $\dfrac{14\pi}{3}$　　B. 7π　　C. 13π　　D. 14π

5. 已知正实数 x,y 满足 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+4=x+y$，则 $x+y$ 的最小值为

A. $\sqrt{13}-2$　　B. 2　　C. $2+\sqrt{13}$　　D. $2+\sqrt{14}$

6. 已知点 $A(4,0)$，$B(0,4)$，直线 $l:x=\dfrac{25}{4}$，动点 P 到点 A 的距离和它到直线 l 的距离之比为 $4:5$，则 $|PB|$ 的最大值是

A. $\sqrt{41}$　　B. 7　　C. $5\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{13}$

7. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为**R**，且 $f(x+1)+f(x-1)=2$，$f(x+2)$ 为偶函数，若 $f(0)=0$，$\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)=111$，则 n 的值为

A. 107　　B. 118　　C. 109　　D [illegible]

8．已知向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$满足$|\boldsymbol{a}|=1$，$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，$2|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}|$，则向量$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$夹角的最大值是

A．$\frac{\pi}{12}$　　B．$\frac{\pi}{6}$　　C．$\frac{\pi}{4}$　　D．$\frac{\pi}{3}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．盒中装有大小相同的 5 小球（编号为 1 至 5），其中黑球 3 个，白球 2 个．每次取一球（取后放回），则

A．每次取到 1 号球的概率为$\frac{1}{5}$

B．每次取到黑球的概率为$\frac{2}{5}$

C．“第一次取到黑球”和“第二次取到白球”是相互独立事件

D．“每次取到 3 号球”与“每次取到 4 号球”是对立事件

10．已知函数$f(x)=x-[x]$，其中$[x]$表示不大于x的最大整数，如：$[0.2]=0$，$[-1.2]=-2$，则

A．$f(x)$是增函数　　B．$f(x)$是周期函数

C．$f(2x)$的值域为$[0,1)$　　D．$f(2x)$是偶函数

11．设抛物线C：$x^2=4y$的焦点为F，过点F的直线与C交于A,B两点，C的准线与y轴交于点M，O为坐标原点，则

A．线段AB长度的最小值为 4

B．若线段AB中点的横坐标为 2，则直线AB的斜率为 1

C．$\angle AMB>\frac{\pi}{2}$

D．$\angle AMO=\angle BMO$

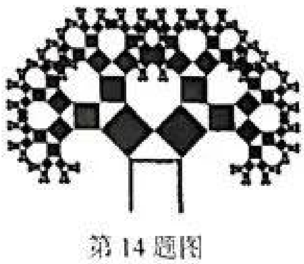
12．已知函数$f(x)=\frac{\ln x}{x}$，$g(x)=xe^{x}$，若存在$x_1\in(0,+\infty)$，$x_2\in\mathbf{R}$，使得$f(x_1)=g(x_2)=k$成立，则

A．当$k>0$时，$x_1+x_2>1$　　B．当$k>0$时，$x_1+e^{x_2}<2e$

C．当$k<0$时，$x_1+x_2<1$　　D．当$k<0$时，$\frac{x_2}{x_1}\cdot e^{k}$的最小值为$-\frac{1}{e}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．函数$y=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$的最小正周期为__▲__．


第 14 题图

14．毕达哥拉斯树是由古希腊数学家毕达哥拉斯根据勾股定理画出来的一个可以无限重复的图形，因为重复数次后的形状好似一棵树，所以被称为毕达哥拉斯树，也叫“勾股树”．毕达哥拉斯树的生长方式如下：以边长为 1 的正方形的一边作为斜边，向外做等腰直角三角形，再以等腰直角三角形的两直角边为边向外作正方形，得到 2 个新的小正方形，实现了一次生长，再将这两个小正方形各按照上述方式生长，如此重复下去，设第n次生长得到的小正方形的个数为a_n，则数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=$__▲__．

15．已知正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，$AA_1=1$，$AB=2$，则直线AA_1与平面B_1CD_1所成角的正弦值为__▲__．

16. 设直线$l:(a+2)x-(a-1)y-3a-3=0$（$a\in\mathbf{R}$）与圆$C:x^2+(y-1)^2=r^2$（$r>0$）交于A,B两点，当$\triangle ABC$面积的最大值为2时，a的值为____▲____.

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. 已知$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$b\left(\sqrt{3}\sin A-\cos C\right)=(c-a)\cos B$.

（I）求B；

（II）在①重心，②内心，③外心这三个条件中选择一个补充在下面问题中，并解决问题．

若$a=5,c=3$，O为$\triangle ABC$的____▲____，求$\triangle OAC$的面积．

注：如果选择多个条件分别解答，则按第一个解答计分．

18. 已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数，记S_n为$\{a_n\}$的前n项和，$a_1=1$，$\dfrac{a_n}{\sqrt{S_nS_{n-1}}}=\dfrac{1}{\sqrt{S_{n-1}}}+\dfrac{1}{\sqrt{S_n}}$（$n\in\mathbf{N}^*$且$n\geq 2$）

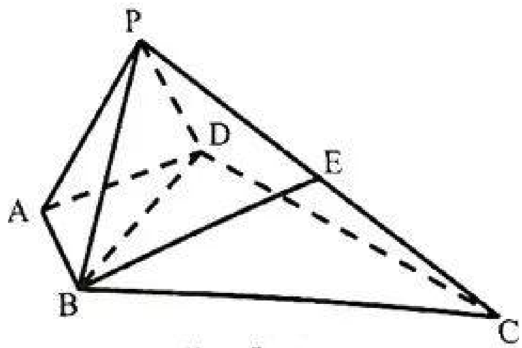
（I）求证：数列$\left\{\sqrt{S_n}\right\}$是等差数列，并求$\{a_n\}$的通项公式；

（II）当$n\in\mathbf{N}^*,n\geq 2$时，求证：$\dfrac{1}{a_2^2-1}+\dfrac{1}{a_3^2-1}+\cdots+\dfrac{1}{a_n^2-1}<\dfrac{1}{4}$.

19. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，平面$PAD\perp$平面$ABCD$，$PA=AD=2$，$BD=4$，$AB=2\sqrt{3}$，BD是$\angle ADC$的平分线，且$BD\perp BC$.

（I）若点E为棱PC的中点，证明：$BE//$平面PAD；

（II）已知二面角$P-AB-D$的大小为$60°$，求平面PBD和平面PCD的夹角的余弦值．



第19题

20. 随着时代的不断发展，社会对高素质人才的需求不断扩大，我国本科毕业生中考研人数也不断攀升，2020 年的考研人数是 341 万人，2021 年考研人数是 377 万人．某省统计了该省其中四所大学 2022 年的毕业生人数及考研人数（单位：千人），得到如下表格：

	A 大学	B 大学	C 大学	D 大学
2022 年毕业人数 x（千人）	7	6	5	4
2022 年考研人数 y（千人）	0.5	0.4	0.3	0.2

（I）已知 y 与 x 具有较强的线性相关关系，求 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$；

（II）假设该省对选择考研的大学生每人发放 0.5 万元的补贴．

（i）若该省 E 大学 2022 年毕业生人数为 8 千人，估计该省要发放补贴的总金额；

（ii）若 A 大学的毕业生中小浙、小江选择考研的概率分别为 $p,3p-1$，该省对小浙、小江两人的考研补贴总金额的期望不超过 0.75 万元，求 P 的取值范围．

参考公式：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$．

21. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，且点 $(3,\sqrt{2})$ 在 C 上．

（I）求双曲线 C 的方程；

（II）试问：在双曲线 C 的右支上是否存在一点 P，使得过点 P 作圆 $x^2+y^2=1$ 的两条切线，切点分别为 A,B，直线 AB 与双曲线 C 的两条渐近线分别交于点 M,N，且 $S_{\Delta MON}=\dfrac{\sqrt{3}}{33}$？若存在，求出点 P；若不存在，请说明理由．

22. 已知函数 $f(x)=x\ln x-x-\dfrac{1}{2}ax^2$，$a\in\mathbf{R}$．

（I）当 $a=\dfrac{2}{e^2}$ 时，证明：$f(x)\le 0$；

（II）若函数 $H(x)=f(x)-(x-1)e^x+ax^2+x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，求 a 的取值范围．

Z20 名校联盟（浙江省名校新高考研究联盟）2023 届高三第一次联考

数学参考答案（后附评分细则）

一、单选题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

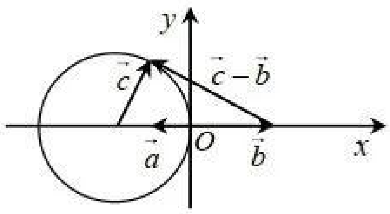
题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	B	D	C	C	D	B

8．解法一：不妨设 $\vec{a}=(-1,0),\vec{b}=(2,0)$，$\vec{c}=(x,y)$，

因为 $\left|\vec{c}-\vec{a}\right|=\frac{1}{2}\left|\vec{c}-\vec{b}\right|$，

所以 $\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(x-2)^2+y^2}$，

即 $x^2+4x+y^2=0$，



由图可知，向量 $\vec{c}-\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 夹角的最大值是 $\frac{\pi}{6}$.

解法二：$\because 2\left|\vec{c}-\vec{a}\right|=\left|\vec{c}-\vec{b}\right|$，$\therefore 2\left|\vec{c}-\vec{b}+\vec{b}-\vec{a}\right|=\left|\vec{c}-\vec{b}\right|$，

又 $\because \vec{b}=-2\vec{a}$，$\therefore 2\left|\left(\vec{c}-\vec{b}\right)-3\vec{a}\right|=\left|\vec{c}-\vec{b}\right|$，

则 $4\left[\left(\vec{c}-\vec{b}\right)^2-6\vec{a}\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}\right)+9\vec{a}^2\right]=\left(\vec{c}-\vec{b}\right)^2$，

即 $\left(\vec{c}-\vec{b}\right)^2-8\vec{a}\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}\right)+12=0$，即 $\vec{a}\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}\right)=\dfrac{\left(\vec{c}-\vec{b}\right)^2+12}{8}$，

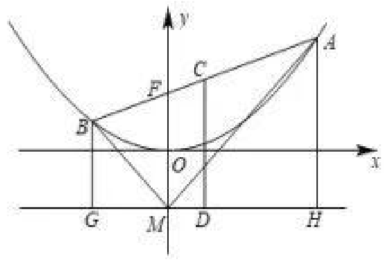
所以 $\cos<\vec{a},\left(\vec{c}-\vec{b}\right)>=\dfrac{\vec{a}\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{c}-\vec{b}\right|}=\dfrac{\left(\vec{c}-\vec{b}\right)^2+12}{8\left|\vec{c}-\vec{b}\right|}\geq\dfrac{2\sqrt{12\left(\vec{c}-\vec{b}\right)^2}}{8\left|\vec{c}-\vec{b}\right|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

向量 $\vec{c}-\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 夹角的最大值是 $\frac{\pi}{6}$.

二、多选题（本大题共 4 小题，每小题 5 分共 20 分.每小题列出的四个选项中有多个是符合题目要求的，全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分）

题号	9	10	11	12
答案	AC	BC	ABD	ACD

11．解析：如图，过 A、B 作准线 $y=-1$ 的垂线，垂足分别为 H、G，设线段 AB 的中点为 C，C 在准线上的射影为 D.当线段 AB 为通径时长度最小为 $2p=4$，故 A 正确；



因为$k_{AB}=\dfrac{x_1+x_2}{2p}=1$，故B正确；

因为直线$y=-1$为抛物线准线，

由抛物线定义可知弦AB的中点到准线的距离CD等于$\dfrac{1}{2}(|BG|+|AH|)=\dfrac{1}{2}|AB|$，

故圆与直线$y=-1$相切，所以点M在该圆的圆上或者圆外，故C错误；

由题意$M(0,-1)$，设$A(x_1,\dfrac{x_1^2}{4})$，$B(x_2,\dfrac{x_2^2}{4})$，直线AB方程为$y=mx+1$，

则$\begin{cases}y=mx+1\\x^2=4y\end{cases}$可得$x^2-4mx-4=0$，所以$x_1+x_2=4m,x_1x_2=-4$，

$$k_{MA}=\frac{\frac{x_1^2}{4}+1}{x_1}=\frac{x_1}{4}+\frac{1}{x_1},k_{MB}=\frac{\frac{x_2^2}{4}+1}{x_2}=\frac{x_2}{4}+\frac{1}{x_2}$$，

$$\therefore k_{MA}+k_{MB}=\frac{x_1}{4}+\frac{1}{x_1}+\frac{x_2}{4}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{4}+\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{x_1+x_2}{4}-\frac{x_1+x_2}{4}=0.$$

所以直线MA与直线MB的斜率互为相反数，直线倾斜角互补，所以$\angle AMO=\angle BMO$，故D正确（D选项也可用平面几何三角形相似得到），

故选：ABD.

12．解析：$\because f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$\therefore f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，$\therefore f(x)$在$(0,e)$上单调递增，在$(e,+\infty)$上单调递减，

又$\because \dfrac{\ln x_1}{x_1}=\dfrac{\ln e^{x_2}}{e^{x_2}}=k$，

$\therefore$当$k>0$时，要使x_1+x_2越小，则取$x_1=e^{x_2}\to 1$，故有$x_1+x_2>1$，故A正确；

又x_1与e^{x_2}均可趋向于$+\infty$，故B错误；

当$k<0$，$x_1=e^{x_2}$，且$x_1\in(0,1)$，$\therefore x_1+x_2=x_1+\ln x_1<1$，故C正确；

$\dfrac{x_2}{x_1}\cdot e^k=ke^k$，令$g(k)=ke^k,k<0$，$g'(k)=(k+1)e^k$，

$\therefore g(k)$在$(-\infty,-1)$单调递减，在$(-1,0)$单调递增，$\therefore g(k)\ge g(-1)=-\dfrac{1}{e}$，故D正确，

故选：ACD.

三、**填空题**（本大题有4小题，单空每空4分，多空每空3分，共20分）

13．π；　　14．$2^{n+1}-2$；

15．$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$；　　16．$a=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$.

16．解析：直线l的方程可化为$a(x-y-3)+2x+y-3=0$，

由$\begin{cases}2x+y-3=0\\x-y-3=0\end{cases}$，解得直线$l$的恒过定点$(2,-1)$，

又点 C 到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{|4a+2|}{\sqrt{(a+2)^2+(a-1)^2}}=\dfrac{|4a+2|}{\sqrt{2a^2+2a+5}}$，

因为 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}r^2\sin\angle BCA\le\dfrac{1}{2}r^2=2\Rightarrow r=2$，

则当 ΔABC 的面积最大为 2 时，ΔABC 为等腰直角三角形，

圆心 C 到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{|4a+2|}{\sqrt{2a^2+2a+5}}=\dfrac{r}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

解得 $a=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$.

四、解答题（本大题有 6 小题，共 70 分．解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤）

17．解：

（1）$\because b\left(\sqrt{3}\sin A-\cos C\right)=(c-a)\cos B$，

$\therefore \sin B\left(\sqrt{3}\sin A-\cos C\right)=(\sin C-\sin A)\cos B$，

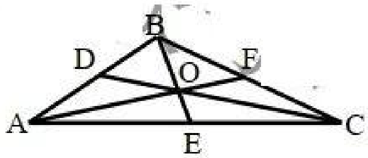
则 $\sqrt{3}\sin A\sin B=\sin(B+C)-\sin A\cos B$，即 $\sqrt{3}\sin A\sin B=\sin A-\sin A\cos B$，

$\because \sin A\neq 0$，$\therefore \sqrt{3}\sin B+\cos B=1$，即有 $\sin(B+\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$，

$\because B+\dfrac{\pi}{6}\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6})$，$\therefore B=\dfrac{2\pi}{3}$；　　　　**5 分**

（2）若选① O 为 ΔABC 的重心，

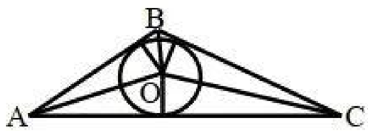
$S_{\Delta OAC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta BAC}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$；　　　　**10 分**



若选② O 为 ΔABC 的内心，

$\because b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=49$，$\therefore b=7$，

设内切圆半径为 r，则有 $\dfrac{1}{2}(a+b+c)r=S_{\Delta ABC}=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$，



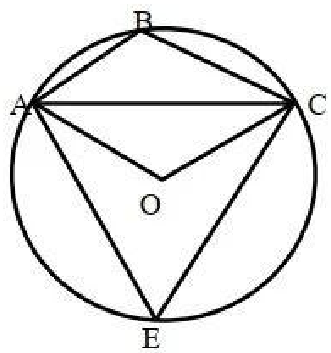
则有 $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，此时 $S_{\Delta OAC}=\dfrac{1}{2}br=\dfrac{7\sqrt{3}}{4}$；　　　　**10 分**

若选③ O 为 ΔABC 的外心，

$\because b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=49$，$\therefore b=7$，

设外接圆半径为 **R**，则 $2\mathbf{R}=\dfrac{b}{\sin B}$，解得 $\mathbf{R}=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$，

如图，$\angle AOC=\dfrac{2\pi}{3}$，



此时，$S_{\triangle OAC}=\frac{1}{2}R^2\sin\angle AOC=\frac{49\sqrt{3}}{12}$． **10 分**

18．解：

（I）$\because \frac{a_n}{\sqrt{S_nS_{n-1}}}=\frac{1}{\sqrt{S_{n-1}}}+\frac{1}{\sqrt{S_n}}$（$n\in N^*$且$n\geq 2$），

$\therefore a_n=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}$，

$\therefore$当$n\geq 2$时，$S_n-S_{n-1}=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}$，

$\therefore \left(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}\right)\left(\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}\right)=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}$，

又$\because a_n>0$，所以$\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}>0$，

$\therefore \sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=1(n\geq 2)$，

$\therefore$数列$\left\{\sqrt{S_n}\right\}$是以$\sqrt{S_1}=\sqrt{a_1}=1$为首项，公差为 1 的等差数列，

$\therefore \sqrt{S_n}=1+(n-1)\times 1=n$，所以$S_n=n^2$． **4 分**

$\therefore$当$n\geq 2$时，$a_n=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}=n+n-1=2n-1$，

又$\because a_1=1$满足上式，

$\therefore$数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n-1$． **6 分**

另解：

当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$，

当$n=1$时，$a_1=1$，满足上式，

所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n-1$． **6 分**

（II）当$n\geq 2$时，$\frac{1}{a_n^2-1}=\frac{1}{4n^2-4n}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$，

故$\frac{1}{a_2^2-1}+\cdots+\frac{1}{a_n^2-1}=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{4}$，

所以对$n\in N^*,n\geq 2$，都有$\frac{1}{a_2^2-1}+\cdots+\frac{1}{a_n^2-1}<\frac{1}{4}$． **12 分**

19．解：

（I）方法一：延长CB,DA交于点F，连接PF，

在ΔCDF中，

$\because BD$是$\angle ADC$的平分线，且$BD\perp BC$，

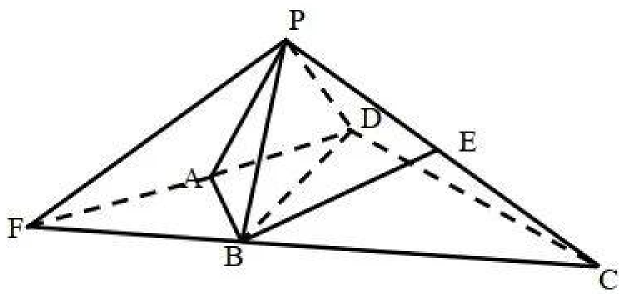
$\therefore$点B是CF的中点，

又$\because E$是PC的中点，

$\therefore BE\ /\!/\ PF$，

又$PF\subset$平面PAD，$BE\not\subset$平面PAD，

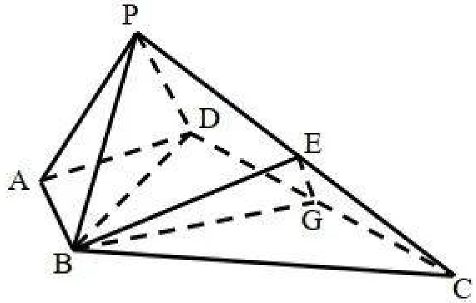
$\therefore$直线$BE\ /\!/$平面PAD． **6 分**



方法二：取CD的中点为G，连接GE，

$\because E$为PC的中点，$\therefore GE\ /\!/\ PD$，

又$PD\subset$平面PAD，$GE\not\subset$平面PAD，



$\therefore GE \parallel$ 平面 PAD，①

又在四边形 $ABCD$ 中，

$AD=2$， $BD=4$， $AB=2\sqrt{3}$，

则 $\angle BAD=90^\circ$，$\angle BDA=\angle BDC=60^\circ$，

又因为 $BD\perp BC$，G 为 CD 的中点，

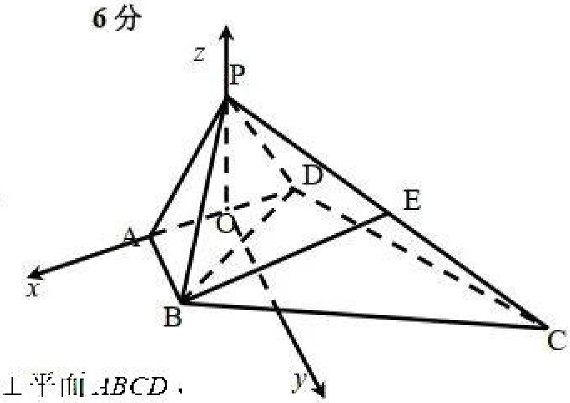
所以 $\angle DBG=\angle BDA=60^\circ$，

所以 $AD \parallel BG$， 可得 $BG \parallel$ 平面 PAD，②

由①②得平面 $BEG \parallel$ 平面 PAD，

又 $BE\subset$ 平面 BEG， $BE\not\subset$ 平面 PAD，

$\therefore$ 直线 $BE \parallel$ 平面 PAD． **6 分**



（II）在 ΔABD 中， $AD=2$， $BD=4$， $AB=2\sqrt{3}$，

则 $\angle BAD=90^\circ$， 即 $BA\perp AD$，

由已知得 $\angle BDC=\angle BDA=60^\circ$， $CD=8$，

又平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$， $BA\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $BA\perp$ 平面 PAD， 即 $BA\perp PA$，

所以 $\angle PAD$ 为二面角 $P-AB-D$ 的的平面角，

所以 $\angle PAD=60^\circ$，

又 $PA=AD=2$， 所以 ΔPAD 为正三角形，

取 AD 的中点为 O， 连 OP， 则 $OP\perp AD$， $OP\perp$ 平面 $ABCD$，

如图建立空间直角坐标系， 则 $A(1,0,0), B\left(1,2\sqrt{3},0\right), C\left(-5,4\sqrt{3},0\right), D(-1,0,0), P\left(0,0,\sqrt{3}\right)$，

所以 $\overrightarrow{DP}=\left(1,0,\sqrt{3}\right), \overrightarrow{BD}=\left(-2,-2\sqrt{3},0\right), \overrightarrow{DC}=\left(-4,4\sqrt{3},0\right)$，

设 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$、$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$ 分别为平面 PBD 和平面 PCD 的法向量，则

$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{DP}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BD}=0\end{cases}$， 即 $\begin{cases}x_1+\sqrt{3}z_1=0\\ -2x_1-2\sqrt{3}y_1=0\end{cases}$， 取 $y_1=-1$， 则 $\vec{m}=\left(\sqrt{3},-1,-1\right)$，

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0\end{cases}$， 即 $\begin{cases}x_2+\sqrt{3}z_2=0\\ -4x_2+4\sqrt{3}y_2=0\end{cases}$， 取 $y_2=1$， 则 $\vec{n}=\left(\sqrt{3},1,-1\right)$，

所以 $\cos\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{3}{5}$，

则平面 PBD 和平面 PCD 所成夹角的余弦值为 $\dfrac{3}{5}$． **12 分**

20．解：

（I）由题意得 $\bar{x}=\dfrac{4+5+6+7}{4}=5.5$， $\bar{y}=\dfrac{0.2+0.3+0.4+0.5}{4}=0.35$，

又 $\sum\limits_{i=1}^{4}x_iy_i=7\times0.5+6\times0.4+5\times0.3+4\times0.2=8.2$，

$\therefore \sum_{i=1}^{4} x_i y_i - 4\overline{x}\cdot\overline{y} = 8.2 - 4\times5.5\times0.35 = 0.5$

$\because \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 7^2+6^2+5^2+4^2 = 126,$

$\therefore \sum_{i=1}^{4} x_i^2 - 4\overline{x}^2 = 126 - 4\times5.5^2 = 5$

$\therefore \hat{b} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} x_i y_i - 4\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{4} x_i^2 - 4\overline{x}^2} = \dfrac{0.5}{5} = 0.1$，

所以 $\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{x} = 0.35 - 0.1\times5.5 = -0.2$，

故得 y 关于 x 的线性回归方程为 $y = 0.1x - 0.2$． **5 分**

（Ⅱ）

（i）将 $x=8$ 代入 $y = 0.1x - 0.2 = 0.1\times8 - 0.2 = 0.6$，

估计该省要发放补贴的总金额为 $0.6\times1000\times0.5 = 300$（万元） **7 分**

（ii）设小浙、小江两人中选择考研的的人数为 X，则 X 的所有可能值为 0，1，2；

$P(X=0) = (1-p)(2-3p) = 3p^2 - 5p + 2$，

$P(X=1) = (1-p)(3p-1) + p(2-3p) = -6p^2 + 6p - 1$，

$P(X=2) = p(3p-1) = 3p^2 - p$，

$\therefore E(X) = 0\times\left(3p^2-5p+2\right) + \left(-6p^2+6p-1\right)\times1 + \left(3p^2-p\right)\times2 = 4p-1$，

$E(0.5X) = 0.5\times(4p-1) \le 0.75 \Rightarrow p \le \frac{5}{8}$，

$\therefore 0 \le 3p-1 \le 1$，$\therefore \frac{1}{3} \le p \le 1$，$\therefore \frac{1}{3} \le p \le \frac{5}{8}$，

故 p 的取值范围为 $\left[\frac{1}{3}, \frac{5}{8}\right]$． **12 分**

注：P 的取值范围未取等不符不扣分

21．解：

（I）因为 $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以 $c^2 = \frac{4}{3}a^2 = a^2 + b^2$，即 $a^2 = 3b^2$，

又点$\left(3,\sqrt{2}\right)$在双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$图象上，

所以$\dfrac{9}{a^2}-\dfrac{2}{b^2}=1$，即$\dfrac{9}{3b^2}-\dfrac{2}{b^2}=1$，解得$b^2=1,a^2=3$，

所以双曲线$C:\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$． **4分**

（II）由已知点A,B在以OP为直径的圆$\left(x-\dfrac{x_0}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{y_0}{2}\right)^2=\dfrac{x_0^2+y_0^2}{4}$上，

又点A,B在$x^2+y^2=1$上，则有方程组$\begin{cases}\left(x-\dfrac{x_0}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{y_0}{2}\right)^2=\dfrac{x_0^2+y_0^2}{4},\\ x^2+y^2=1,\end{cases}$

解得直线AB的方程为$x_0x+y_0y=1$，

设直线AB与渐近线$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x,y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$的交点分别为$M,N$，

由$\begin{cases}x_0x+y_0y=1,\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x,\end{cases}$解得$M\left(\dfrac{1}{x_0+\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_0},\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{x_0+\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_0}\right)$，

由$\begin{cases}x_0x+y_0y=1,\\ y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x,\end{cases}$解得$N\left(\dfrac{1}{x_0-\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_0},\dfrac{-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{x_0-\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_0}\right)$，

所以$|MN|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{x_0+\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_0}-\dfrac{1}{x_0-\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_0}\right)^2+\left(\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{x_0+\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_0}+\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{x_0-\dfrac{\sqrt{3}}{3}y_0}\right)^2}=\dfrac{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{\left|x_0^2-\dfrac{1}{3}y_0^2\right|}$，

又点O到直线AB的距离为$d=\dfrac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$，

则三角形MON的面积$S=\dfrac{1}{2}|MN|\cdot d=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{\left|x_0^2-\dfrac{1}{3}y_0^2\right|}\times\dfrac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{1}{\left|x_0^2-\dfrac{1}{3}y_0^2\right|}$，

又因为$\dfrac{x_0^2}{3}-y_0^2=1$，所以$S=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{1}{3+\dfrac{8}{3}y_0^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{9+8y_0^2}$，

由已知$S=\dfrac{\sqrt{3}}{33}$，解得$y_0^2=3$，即$y_0=\pm\sqrt{3}$，

因为点P在双曲线右支上，解得$x_0=2\sqrt{3}$，

即点$P\left(2\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$或$P\left(2\sqrt{3},-\sqrt{3}\right)$． **12分**

22．解：

（I）当 $a=\frac{2}{e^2}$ 时，$f(x)=x\ln x-x-\frac{1}{e^2}x^2=x\left(\ln x-1-\frac{1}{e^2}x\right)$，

要证 $f(x)\le 0$，即证 $\ln x-1-\frac{1}{e^2}x\le 0$，

设 $g(x)=\ln x-1-\frac{1}{e^2}x, x>0$，

令 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e^2}=0$，解得 $x=e^2$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,e^2)$ 上递增，在 $(e^2,+\infty)$ 上递减，

则 $g(x)_{\max}=g(e^2)=\ln e^2-1-\frac{1}{e^2}\times e^2=0$，

所以 $g(x)\le 0$，即 $\ln x-1-\frac{1}{e^2}x\le 0$ 成立，

所以 $f(x)\le 0$ 成立. **5分**

（II）因为对任意的 $x>0, H(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $H'(x)\le 0$ 恒成立，

即 $a\le\frac{xe^x-\ln x-1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

解法一：令 $F(x)=\frac{xe^x-\ln x-1}{x}(x>0)$，则 $F'(x)=\frac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$，

令 $h(x)=x^2e^x+\ln x$，则 $h'(x)=\left(x^2+2x\right)e^x+\frac{1}{x}>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

又因为 $h(1)=e>0, h\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^2}-1=e^{\frac{1}{e}-2}-1<0$，

所以 $\exists x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$，使得 $h(x_0)=0$，即 $x_0^2e^{x_0}+\ln x_0=0$，

当 $0<x<x_0$ 时，$h(x)<0$，可得 $F'(x)<0$，所以 $F(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减；

当 $x>x_0$ 时，$h(x)>0$，可得 $F'(x)>0$，所以 $F(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $F(x)_{\min}=F(x_0)=\frac{x_0e^{x_0}-\ln x_0-1}{x_0}$，

由 $x_0^2e^{x_0}+\ln x_0=0$，可得 $x_0e^{x_0}=-\frac{\ln x_0}{x_0}=\frac{1}{x_0}\ln\frac{1}{x_0}=\left(\ln\frac{1}{x_0}\right)e^{\ln\frac{1}{x_0}}$，

令 $t(x)=xe^x$，则 $t(x_0)=t\left(\ln\frac{1}{x_0}\right)$，

又由 $t'(x)=(x+1)e^x>0$，所以 $t(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $x_0=\ln\frac{1}{x_0}$，可得 $\ln x_0=-x_0$，所以 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，即 $x_0e^{x_0}=1$，

所以 $F(x)_{\min}=F(x_0)=\dfrac{x_0e^{x_0}-\ln x_0-1}{x_0}=\dfrac{1+x_0-1}{x_0}=1$，

即得 $a\le1$．　　　　　　　　　　　　　　　　　　**12 分**

解法二：　先证 $e^x\ge x+1$（$x\ge0$），
设函数 $h(x)=e^x-x-1$，令 $h'(x)=e^x-1=0$，解得 $x=0$，
$\therefore h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore h(x)\ge h(0)=0$，即 $e^x\ge x+1$ 成立．
设 $k(x)=\ln x+x$（$x>0$），
$\because k'(x)=\frac{1}{x}+1>0$，$\therefore k(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，
$\because k\left(\frac{1}{e}\right)=-1+\frac{1}{e}<0, k(1)=1>0$，
$\therefore$ 存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使得 $\ln x_0+x_0=0$．
令 $F(x)=\dfrac{xe^x-\ln x-1}{x}(x>0)$，
则 $F(x)=\dfrac{e^{\ln x}e^x-\ln x-1}{x}=\dfrac{e^{\ln x+x}-\ln x-1}{x}\ge\dfrac{\ln x+x+1-\ln x-1}{x}=1$，
当 $\ln x+x=0$ 时，即 $x=x_0$ 时，取等号．
$\therefore F(x)_{\min}=1$，
即得 $a\le1$．　　　　　　　　　　　　　　　　　　**12 分**

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。