

怀化市 2023 年上期高一年级期末考试试题

数学答案

1. 【答案】A

2. 【答案】D

3. 【答案】A

4. 【答案】D

5. 【答案】D

6. 【答案】B

7. 【答案】B

8. 【答案】A

9. 【答案】AB

10. 【答案】ACD

11. 【答案】BC

12. 【答案】ACD

13. 【答案】35

14. 【答案】(2, -1)

15. 【答案】 $\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ 和 } \frac{1}{2}\sqrt{6}$

16. 【答案】 $-\frac{2\sqrt{247}}{247} \text{ 和 } -\frac{2}{247}\sqrt{247}$

17. 【答案】(1) $b = \sqrt{5}$

18. 【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

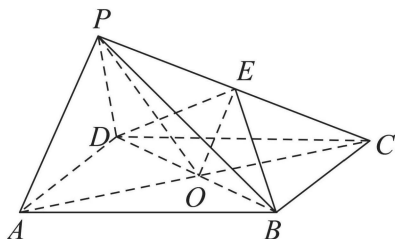
【解析】

【分析】(1) 根据线面平行的判定定理，结合中位线定理，可得答案；

(2) 利用平行线的性质，以及等腰三角形的性质，根据线面垂直判定定理，结合面面垂直判定定理，可得答案.

【小问 1 详解】

如图，连接 OE ，因为 O 为平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点，所以 O 为 AC 的中点.



又 E 为 PC 的中点, 所以 $OE \parallel PA$.

因为 $OE \subset$ 平面 BDE , $PA \not\subset$ 平面 BDE , 所以直线 $PA \parallel$ 平面 BDE .

【小问 2 详解】

因为 $OE \parallel PA$, $PA \perp PD$, 所以 $OE \perp PD$.

因为 $OP=OC$, E 为 PC 的中点, 所以 $OE \perp PC$.

又 $PD \subset$ 平面 PCD , $PC \subset$ 平面 PCD , $PC \cap PD = P$, 所以 $OE \perp$ 平面 PCD .

因为 $OE \subset$ 平面 BDE , 所以平面 $BDE \perp$ 平面 PCD .

19. 【答案】(1) 0.025; 73 分

$$(2) \frac{448}{1125}$$

【解析】

【分析】(1) 根据频率和为 1 即可求解 a , 利用平均数公式可得平均成绩;

(2) 依题意先求得抽取“黄金搭档组”的概率 p , 再根据事件的独立与互斥求解即可.

【小问 1 详解】

由题意, 得 $(0.005 + 0.01 + 0.015 + a + 0.045) \times 10 = 1$, 解得 $a = 0.025$,

不低于 50 分考生的平均成绩估计为 $55 \times 0.1 + 65 \times 0.25 + 75 \times 0.45 + 85 \times 0.15 + 95 \times 0.05 = 73$ (分);

【小问 2 详解】

在 $[90, 100]$ 上的频率为 $0.005 \times 10 = 0.05$, 由条件得总人数为 $\frac{2}{0.05} = 40$,

所以在 $[50, 60)$ 内的人数为 $40 \times 0.1 = 4$,

记 $[50, 60)$ 内的所有学生的考号所在小球分别为 a_1, a_2, a_3, a_4 , $[90, 100]$ 内的所有学生的考号所在小球分别为 b_1, b_2 ,

则从这 6 个球中抽取 2 个球的结果有: $a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4, a_1b_1, a_1b_2, a_2a_3, a_2a_4, a_2b_1, a_2b_2, a_3a_4, a_3b_1, a_3b_2,$

a_4b_1, a_4b_2, b_1b_2 共 15 种,

其中为“黄金搭档组”有 $a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2, a_3b_1, a_3b_2, a_4b_1, a_4b_2$ 共 8 种,

所以抽取出“黄金搭档组”的概率 $p = \frac{8}{15}$.

记取出“黄金搭档组”的次数为 2 为事件 A , 事件 $A_i (i=1, 2, 3)$ 表示第 i 次取出“黄金搭档组”,

所以 $P(A) = P(A_1A_2\overline{A_3}) + P(A_1\overline{A_2}A_3) + P(\overline{A_1}A_2A_3)$

$$= \frac{8}{15} \times \frac{8}{15} \times \frac{7}{15} + \frac{8}{15} \times \frac{7}{15} \times \frac{8}{15} + \frac{7}{15} \times \frac{8}{15} \times \frac{8}{15} = \frac{448}{1125},$$

故取出“黄金搭档组”的次数为 2 的概率为 $\frac{448}{1125}$.

20. 【答案】(1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $(4, 6]$

【解析】

【分析】(1) 利用正弦定理把边化为角, 结合三角变换与同角基本关系可求得 C , 结合已知与面积公式即可求解;

(2) 用正弦定理把边化角, 结合三角恒等变换化简, 利用三角函数的值域求解, 即可得到答案.

【小问 1 详解】

因为 $\frac{\sqrt{3}}{3}b \sin C + c \cos B = a$,

由正弦定理, 可得 $\frac{\sqrt{3}}{3} \sin B \sin C + \sin C \cos B = \sin A$,

又由 $A+B+C=\pi$, 可得 $\sin A = \sin(B+C)$,

所以 $\frac{\sqrt{3}}{3} \sin B \sin C + \sin C \cos B = \sin(B+C)$,

所以 $\frac{\sqrt{3}}{3} \sin B \sin C + \sin C \cos B = \sin B \cos C + \cos B \sin C$,

即 $\frac{\sqrt{3}}{3} \sin B \sin C = \sin B \cos C$,

因为 $B \in (0, \pi)$, 可得 $\sin B > 0$, 所以 $\frac{\sqrt{3}}{3} \sin C = \cos C$, 即 $\tan C = \sqrt{3}$,

又因为 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{\pi}{3}$,



所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

【小问 2 详解】

由 (1) 可知 $C = \frac{\pi}{3}$,

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{2}{\sin \frac{\pi}{3}}$, 所以 $a = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin A, b = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin B$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } a+b+c &= \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin A + \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin B + 2 = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin A + \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin \left(\frac{2\pi}{3} - A \right) + 2 \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} \left(\frac{3}{2} \sin A + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A \right) + 2 = 4 \sin \left(A + \frac{\pi}{6} \right) + 2, \end{aligned}$$

因为 $0 < A < \frac{2\pi}{3}$,

所以 $\frac{\pi}{6} < A + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}$, 所以 $\frac{1}{2} < \sin \left(A + \frac{\pi}{6} \right) \leq 1$,

所以 $4 < 4 \sin \left(A + \frac{\pi}{6} \right) + 2 \leq 6$,

故 $\triangle ABC$ 周长的取值范围为 $(4, 6]$.

21. 【答案】(1) 证明见解析;

(2) $\frac{\pi}{4}$

【解析】

【分析】(1) 根据给定条件证得 $OA \perp$ 平面 BCD 即可得解;

(2) 根据三棱锥 $A-BCD$ 的体积求得 AO , 可得 $CD \perp CB$, 作辅助线作 $EF \perp BD$ 于 F , 作 $FM \perp BC$ 于 M , 连 EM , 利用定义法找到二面角 $E-BC-D$ 的平面角, 再求得相关线段长, 解三角形可得答案.

【小问 1 详解】

在三棱锥 $A-BCD$ 中, 因为 O 为 BD 的中点,

且 $AB = AD$, 则 $OA \perp BD$, 又平面 $ABD \perp$ 平面 BCD ,

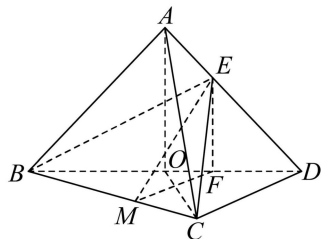
平面 $ABD \cap$ 平面 $BCD = BD$, $OA \subset$ 平面 ABD ,

所以 $OA \perp$ 平面 BCD , 而 $CD \subset$ 平面 BCD ,

所以 $OA \perp CD$.

【小问 2 详解】

因 $\triangle OCD$ 是边长为 1 的等边三角形, 所以 $S_{\triangle OCD} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, 则 $S_{\triangle BCD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,



因 $AO \perp$ 平面 BCD , 所以 AO 为三棱锥 $A-BCD$ 的高, 设为 h ,

$$\text{所以 } V_{A-BCD} = \frac{1}{3} h S_{\triangle BCD} = \frac{\sqrt{3}}{6} h = \frac{\sqrt{3}}{6}, \therefore h = 1,$$

所以 $OA = OB = OC = OD = CD = 1$, 即有 $OC = \frac{1}{2} BD$, 所以 $CD \perp CB$,

作 $EF \perp BD$ 于 F , 作 $FM \perp BC$ 于 M , 连 EM , 则 $AO \parallel EF$,

因为 $AO \perp$ 平面 BCD , 所以 $EF \perp$ 平面 BCD ,

$BC \subset$ 平面 BCD , 则 $EF \perp BC$, 因为 $FM \perp BC$,

$FM \cap EF = F, FM, EF \subset$ 平面 EFM , 所以 $BC \perp$ 平面 EFM ,

而 $ME \subset$ 平面 EFM , 故 $BC \perp ME$,

则 $\angle EMF$ 为二面角 $E-BC-D$ 的平面角.

$$\text{又 } DE = 2EA, \text{ 所以 } EF = \frac{2}{3} AO = \frac{2}{3},$$

在 $\triangle BCD$ 中, $FM \perp BC$, $CD \perp CB$, 所以 $FM \parallel CD$,

$$\text{由 } OA = OD \text{ 知 } \angle ODA = \frac{\pi}{4}, \text{ 故 } DF = EF = \frac{2}{3}, \text{ 所以 } BF = \frac{4}{3}, \text{ 即 } \frac{BF}{BD} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore FM = \frac{2}{3} CD = \frac{2}{3}, \text{ 从而 } EF = FM = \frac{2}{3},$$

又因为在 $\triangle EMF$ 中, $EF \perp FM$, 所以 $\triangle EMF$ 为等腰直角三角形,

$$\text{所以 } \angle EMF = \frac{\pi}{4}, \text{ 即二面角 } E-BC-D \text{ 的大小为 } \frac{\pi}{4}.$$

22. 【答案】(1) A, C 获得冠军的概率分别为 $\frac{4}{9}, \frac{7}{36}$

(2) 淘汰赛赛制下 A 获得冠军的概率为 p^2 , “双败赛制”赛制下 A 获得冠军的概率为 $p^3(3-2p)$, 双败赛制下对强者更有利.

【解析】

【分析】(1) 利用独立事件乘法、互斥事件加法公式求 A, C 获得冠军的概率；

(2) 分别求出不同赛制下 A 获得冠军的概率，研究 $\frac{1}{2} < p < 1$ 哪种赛制下 A 获得冠军的概率更大，即可得结论.

【小问 1 详解】

A 获得冠军： AB 组 A 获胜，再由 A 与 CD 组胜者决赛并胜出，

$$A \text{ 获得冠军的概率为 } P_1 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9},$$

C 获得冠军： CD 组 C 获胜，再由 C 与 AB 组胜者决赛并胜出，

$$C \text{ 获得冠军的概率为 } P_2 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times (1 - \frac{2}{3}) + \frac{1}{2} \times (1 - \frac{2}{3}) \times \frac{1}{2} = \frac{7}{36}.$$

【小问 2 详解】

淘汰赛赛制下， A 获得冠军的概率为 $p \times \frac{1}{2} \times p + p \times \frac{1}{2} \times p = p^2$ ，

“双败赛制”赛制下，讨论 A 进入胜者组、败者组两种情况，

当 A 进入胜者组，若在胜者组 A 失败，后两局都胜，方可得冠军；

若在胜者组 A 胜利，后一局（与败者组胜者比赛）胜，方可得冠军；

当 A 进入败者组，后三局都胜，方可得冠军；

综上， A 获得冠军的概率 $p^3(1-p) + p^3 + (1-p)p^3 = p^3(3-2p)$.

$$\text{令 } f(p) = p^3(3-2p) - p^2 = p^2(-2p^2 + 3p - 1) = p^2(2p-1)(1-p),$$

若 A 为强队，则 $\frac{1}{2} < p < 1$ ，故 $f(p) > 0$ ，

所以，双败赛制下对强者更有利.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线