湘豫名校联考(2021年11月)

数学(理科)参考答案

一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	A	A	D	C	A	B	B	A	D	C	D

1. C 【解析】有已知条件得 $z=\frac{3-i}{1+i}=\frac{(3-i)(1-i)}{2}=1-2i$,故选C.

2. A 【解析】易知 $A=(2,+\infty)$,所以 $\complement_{R}A=(-\infty,2]$,又 $B=[-2,4]$,所以 $(\complement_{R}A)\cap B=[-2,2]$.故选A.

3. A 【解析】当 $a=\pm1$ 时,函数 $f(x)=\lg(\sqrt{x^2+1}+ax)$ 为奇函数,所以"$a=1$"是"函数 $f(x)=\lg(\sqrt{x^2+1}+ax)$ 为奇函数"的充分不必要条件.故选A.

4. D 【解析】由 $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\frac{1}{3}$ 得 $\cos 2\alpha=-\frac{1}{3}$.因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\sin 2\alpha>0$,$\sin 2\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,所以 $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{-4-\sqrt{2}}{6}$.故选D.

5. C 【解析】根据此频率分布直方图,成绩在[80,100]内的频率为 $(0.008+0.012)\times10=0.20$,所以A正确;
这50名学生中成绩在[60,80)内的人数为 $(0.032+0.020)\times10\times50=26$,所以B正确;
根据此频率分布直方图,可得这50名学生成绩的中位数 $\in(60,70)$,所以C错误;
根据频率分布直方图的平均数的计算公式,可得:
$\bar{x}=45\times0.08+55\times0.2+65\times0.32+75\times0.2+85\times0.12+95\times0.08=68.2$,所以D正确.
故选C.

6. A 【解析】由题意可知,$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

$\because f(-x)=\frac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}=-f(x)$,$\therefore f(x)$ 为奇函数,

$\because f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=1-\frac{2}{e^{2x}+1}$,

且 $g(x)=\frac{2}{e^{2x}+1}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数,

$\therefore$ 由复合函数的单调性可知 $f(x)=1-\frac{2}{e^{2x}+1}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数.

$\because f(2m+3)+f(-m^2)>0$,$\therefore f(2m+3)>f(m^2)$,

$\therefore m^2-2m-3<0$,$\therefore -1<m<3$.故选A.

7. B 【解析】根据教材中提供的关于平行的性质定理可知①②是正确的,③④除了平行之外,还有可能直线在平面内,所以不能判断线面平行一定成立.故选B.

8. B 【解析】由正弦定理得 $2\sin C\cos B=2\sin A-\sin B\Rightarrow\sin B=2\sin(B+C)-2\sin C\cos B=2\sin B\cos C\Rightarrow$ $\cos C=\frac{1}{2}$,

又由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\Rightarrow a^2-3a-4=0$,解得 $a=4$,

所以△ABC的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=3\sqrt{3}$,故选B.

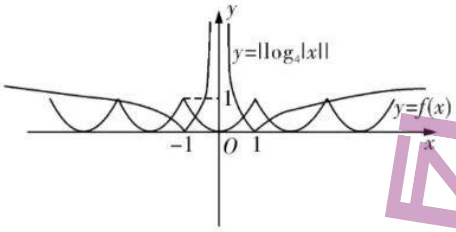
9. A 【解析】设 $|AF_2|=m$,由双曲线的定义可得 $|AF_1|=2a+m$,

则 $|BF_2|=|AB|-|AF_2|=2a$，所以，$|BF_1|=4a$，

因为 $|AB|=|AF_1|$，且 $\triangle F_1AB\backsim\triangle F_2F_1B$，所以 $|F_2F_1|=|BF_1|$，即 $2c=4a$，$e=2$.

故选 A.

10. D 【解析】$y=f(x)-|\log_4|x||$ 的零点个数，即 $y=f(x)$ 与 $y=|\log_4|x||$ 的图象的交点个数，作出图象可得共有 8 个交点. 故选 D.



11. C 【解析】取 BC 的中点 O，连接 SO，AO，因为 $\angle SBA=\angle SCA=\frac{\pi}{2}$，$BA=CA$，$SA=SA$，

所以 $\triangle SBA\cong\triangle SCA$.

所以 $SB=SC$，所以 $SO\perp BC$，$OA\perp BC$，因此 $\angle SOA=\frac{2\pi}{3}$ 为二面角 $S-BC-A$ 的平面角，

设 $SO=x$，则 $SB=\sqrt{x^2+1}$，因为 $\angle SBA=\frac{\pi}{2}$，$\therefore SA=\sqrt{x^2+5}$，

在 $\triangle SOA$ 中，由余弦定理得 $SO^2+OA^2-2SO\cdot OA\cos\frac{2\pi}{3}=SA^2$，即 $x^2+3+\sqrt{3}x=x^2+5$，解得 $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$，所以

三棱锥的外接球的直径 $2R=SA=\sqrt{x^2+5}=\sqrt{\frac{19}{3}}$，

所以三棱锥的外接球的表面积为 $S_{球}=4\pi R^2=\frac{19}{3}\pi$.

故选 C.

12. D 【解析】由题意知，$f(0)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)=0\Rightarrow a=-1$. $\therefore f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，

$\therefore g(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，$h(x)=2\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$.

对于①：因为 $h(x_1)=2$，$h(x_2)=-2$，且 $|x_1-x_2|_{\min}=\pi$，所以 $h(x)$ 的最小正周期为 $T=2\pi$，

$\therefore \frac{\pi}{\omega}=2\pi\Rightarrow\omega=\frac{1}{2}$. 故① 错误；

对于②：图象变换后所得函数为 $y=2\sin\left(2\omega x+\frac{\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$，

若其图象关于 y 轴对称，则 $\frac{\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\omega=1+3k$，$k\in\mathbf{Z}$，

当 $k=0$ 时，$\omega=1\in(0,2)$. 故②正确；

对于③：设 $t=2\omega x+\frac{\pi}{6}$，当 $x\in[0,2\pi]$ 时，$t=2\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},4\omega\pi+\frac{\pi}{6}\right]$.

$h(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上有 7 个零点，即 $y=2\sin t$ 在 $t\in\left[\frac{\pi}{6},4\omega\pi+\frac{\pi}{6}\right]$ 上有 7 个零点.

则 $7\pi\leqslant 4\omega\pi+\frac{\pi}{6}<8\pi$，解得 $\frac{41}{24}\leqslant\omega<\frac{47}{24}$. 故③错误；

对于④：由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2\omega x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

得 $-\frac{\pi}{3\omega}+\frac{k\pi}{\omega}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6\omega}+\frac{k\pi}{\omega}$，$k\in\mathbf{Z}$，

取 $k=0$，可得 $-\frac{\pi}{3\omega}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6\omega}$，

若 $h(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，则 $\begin{cases}-\frac{\pi}{3\omega}\leqslant-\frac{\pi}{6},\\ \frac{\pi}{6\omega}\geqslant\frac{\pi}{4},\end{cases}$ 解得 $0<\omega\leqslant\frac{2}{3}$. 故④正确.

故选 D.

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 5 **【解析】**将点 $P(4,4)$ 坐标代入抛物线 $C:x^2=2py$，解得 $p=2$，即抛物线方程为 $x^2=4y$，

所以 $|PF|=4+\frac{p}{2}=5$.

14. -120 **【解析】**令 $x=1$ 得 $\left(x+\frac{a}{x}\right)\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中各项系数的和为 $1+a=0\Rightarrow a=-1$，

所以 $\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5$ 的常数项为：$x\cdot C_5^3(2x)^2\left(-\frac{1}{x}\right)^3-\frac{1}{x}\cdot C_5^2(2x)^3\left(-\frac{1}{x}\right)^2=-120$.

15. 16 **【解析】**根据已知条件建立恰当的坐标系，各点坐标分别为：$A(1,0)$，$B(4,0)$，$C(2,2\sqrt{3})$，

设动点 $E(x,y)$，则由 $|BE|=2|AE|$ 得：$x^2+y^2=4$，令 $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=2\sin\theta,\end{cases}$

则 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BE}=(-2,2\sqrt{3})\cdot(x-4,y)=2\sqrt{3}y-2x+8=4\sqrt{3}\sin\theta-4\cos\theta+8=8\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)+8$，

所以 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BE}$ 的最大值为 16.

16. $(0,e^2)$ **【解析】**易知 $a>0$，将原不等式变形可得：$e^x>a\frac{\ln ax-1}{e}\Rightarrow xe^x>\frac{ax}{e}\ln\frac{ax}{e}$，

设 $h(x)=xe^x$，则 $h'(x)=(x+1)e^x$，

当 $\ln\frac{ax}{e}<0$ 时，原不等式显然成立；

当 $\ln\frac{ax}{e}\geqslant0$ 时，因为 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递增，$\therefore x>\ln\frac{ax}{e}\Rightarrow a<\frac{e^{x+1}}{x}$，

设 $\varphi(x)=\frac{e^{x+1}}{x}$，则 $\varphi'(x)=\frac{x-1}{x^2}e^{x+1}$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 递减，$(1,+\infty)$ 递增，

所以 $\varphi(x)$ 的最小值为 $\varphi(1)=e^2$，故 $0<a<e^2$.

三、解答题：本大题共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(一)必考题：共 60 分

17.**【解析】**(1)因为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，所以由 $a_{n+1}=\sqrt{S_{n+1}-1}+\sqrt{S_n-1}$ 可得

$S_{n+1}-S_n=(S_{n+1}-1)-(S_n-1)=\sqrt{S_{n+1}-1}+\sqrt{S_n-1}$

$\Rightarrow\sqrt{S_{n+1}-1}-\sqrt{S_n-1}=1$，…………（3 分）

又因为 $a_1=1$，所以 $\sqrt{S_1-1}=0$，

因此，数列 $\{\sqrt{S_n-1}\}$ 是以 0 为首项、1 为公差的等差数列，

所以，$\sqrt{S_n-1}=n-1$，$S_n=(n-1)^2+1$. …………（5 分）

(2)因为 $b_n=\frac{4n}{S_n\cdot S_{n+2}}=\frac{4n}{[(n-1)^2+1]\cdot[(n+1)^2+1]}$，

而 $[(n+1)^2+1]-[(n-1)^2+1]=4n$，

所以 $b_n=\frac{1}{(n-1)^2+1}-\frac{1}{(n+1)^2+1}$，…………（8 分）

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $T_n=\left[1-\frac{1}{5}\right]+\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\right]+\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{17}\right]+\left[\frac{1}{10}-\frac{1}{26}\right]\cdots+$ $\left[\frac{1}{(n-2)^2+1}-\frac{1}{n^2+1}\right]+\left[\frac{1}{(n-1)^2+1}-\frac{1}{(n+1)^2+1}\right]=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n^2+1}-\frac{1}{(n+1)^2+1}$，…………（11 分）

故 $T_n<1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，命题得证. …………（12 分）

18.【解析】(1)依题意:男、女教师支持实行"弹性上下班"制的人数分别为 200、120,完成列联表如下: ……(1分)

	支持实行"弹性上下班"制	不支持实行"弹性上下班"制	合计
男教师	200	100	300
女教师	120	80	200
合计	320	180	500

……(3分)

将数据代入公式 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,计算得 $K^2=\dfrac{125}{54}\approx 2.315<2.706$, ……(5分)

据此可知没有 90% 的把握认为支持实行"弹性上下班"制与教师的性别相关. ……(6分)

(2)依题意,在此十名优秀教师中男教师 6 人、女教师 4 人.

若用 X 表示三位发言教师的女教师人数,则 X 的可能取值为:0,1,2,3,

其概率分别为:$P(X=0)=\dfrac{C_4^0\cdot C_6^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{6}$;$P(X=1)=\dfrac{C_4^1\cdot C_6^2}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{2}$;

$P(X=2)=\dfrac{C_4^2\cdot C_6^1}{C_{10}^3}=\dfrac{3}{10}$;$P(X=3)=\dfrac{C_4^3\cdot C_6^0}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{30}$. ……(10分)

随机变量 X 的分布列如下:

变量 X	0	1	2	3
概率 P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

随机变量 X 的数学期望为:$EX=\dfrac{1}{2}\times 1+2\times\dfrac{3}{10}+3\times\dfrac{1}{30}=\dfrac{6}{5}$. ……(12分)

19.【解析】(1)设 AD 的中点为 O,连接 SO,BO, ……(1分)

在等边$\triangle SAD$ 中,可得 $SO\perp AD$,

在等腰梯形 $ABCD$ 中,有 $OA=OB=OC=OD$,

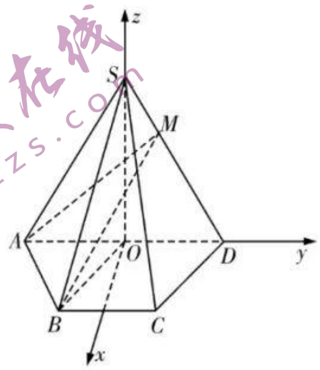
又因为 $SA=SB$,所以$\triangle SOA\cong\triangle SOB$, ……(3分)

所以$\angle SOA=\angle SOB=\dfrac{\pi}{2}$,即 $SO\perp OB$,

又因为 $SO\perp AD$,$AD\cap BO=O$,所以 $SO\perp$平面 $ABCD$,

又因为 SO 在平面 SAD 内,所以平面 $SAD\perp$平面 $ABCD$. ……(5分)

(2)如图所示建立空间直角坐标系,各点坐标依次为:$A(0,-1,0)$,$B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)$,



$C\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$,$D(0,1,0)$,$S(0,0,\sqrt{3})$, ……(6分)

设$\overrightarrow{DM}=k\overrightarrow{DS}(0\leqslant k\leqslant 1)$，平面$MAB$的一个法向量为$\boldsymbol{n}_1=(a,b,c)$，

因为$\overrightarrow{AB}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$，$\overrightarrow{AM}=(0,2-k,\sqrt{3}k)$，……（8分）

由$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\\ \overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b=0,\\ (2-k)b+\sqrt{3}kc=0,\end{cases}$

令$a=1$，得$\boldsymbol{n}_1=\left(1,-\sqrt{3},\frac{2}{k}-1\right)$，……（10分）

易知平面$ABCD$的法向量为$\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$，

由$\cos\frac{\pi}{4}=\left|\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}\right|=\frac{\left|\frac{2}{k}-1\right|}{\sqrt{4+\left(\frac{2}{k}-1\right)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得$k=\frac{2}{3}$或$k=-2$(舍).

所以$\overrightarrow{DM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DS}$，故$\frac{DM}{MS}=2$.……（12分）

20.【解析】(1)因为椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率$e=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以$\frac{b^2}{a^2}=1-e^2=\frac{1}{3}$，即$a^2=3b^2$，……（2分）

易知$|PO|^2\in[b^2,a^2]$，所以$b^2=1$，……（3分）

故椭圆E的标准方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$.……（4分）

(2)将直线$l:y=kx+m$和椭圆$\frac{x^2}{3}+y^2=1$联立，

可得：$x^2+3(kx+m)^2-3=0$，

化简即$(3k^2+1)x^2+6kmx+3m^2-3=0$.

所以$x_1+x_2=-\frac{6km}{3k^2+1}$，$x_1\cdot x_2=\frac{3m^2-3}{3k^2+1}$，……（6分）

所以由$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=3\Rightarrow 12k^2m^2-2(m^2-1)\cdot(3k^2+1)=(3k^2+1)^2$

$\Rightarrow 2m^2\cdot(3k^2-1)=(3k^2+1)\cdot(3k^2-1)$，

所以$3k^2-1=0$或$3k^2+1=2m^2$，……（9分）

又直线$l:y=kx+m$与圆$x^2+y^2=1$相切，则$\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=1\Rightarrow k^2+1=m^2$，……（10分）

当$3k^2-1=0$时，解得$k^2=\frac{1}{3}$，$m^2=\frac{4}{3}$，直线l的方程为：$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

当$3k^2+1=2m^2$时，解得$k^2=1$，$m^2=2$，直线l的方程为：$y=\pm x\pm\sqrt{2}$.

综上所述，存在满足题设条件的直线且直线l有八条.……（12分）

21.【解析】(1)当$a=1$时，函数$f(x)=e^x-(x+1)\ln(x+1)$.

因为$f'(x)=e^x-\ln(x+1)-1$，……（1分）

而$f''(x)=e^x-\frac{1}{x+1}$在$(-1,+\infty)$单调递增且$f''(0)=0$.

所以当$x>0$时，$f''(x)>0$，

即函数$f'(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，……（3分）

所以$f'(x)\geqslant f'(0)=0$，∴函数$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，

又$f(0)=1$，所以当$x>0$时，$f(x)>1$.……（5分）

(2)函数$f(x)=ae^x-(x+1)\ln\frac{x+1}{a}$的导函数为$f'(x)=ae^x-\ln(x+1)+\ln a-1$，

对于$f''(x)=ae^x-\frac{1}{x+1}$，当$x\to-1$时，$f''(x)\to-\infty$；当$x\to+\infty$时，$f''(x)\to+\infty$.

又函数 $f''(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 单调递增，所以函数 $f''(x)$ 有唯一零点 x_0，即 $ae^{x_0}-\frac{1}{x_0+1}=0$，……… (7 分)

当 $-1<x<x_0$ 时，$f''(x)<0$；当 $x>x_0$ 时，$f''(x)>0$，

即函数 $f'(x)$ 在 $(-1,x_0)$ 单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 单调递增，所以函数 $f'(x)$ 的极小值为 $f'(x_0)$，

$f'(x_0)=ae^{x_0}-\ln(x_0+1)+\ln a-1=\frac{1}{x_0+1}-(x_0+1)-2\ln(x_0+1)$，…………………………… (9 分)

设函数 $h(x)=\frac{1}{x+1}-(x+1)-2\ln(x+1)$，

易知函数 $h(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 单调递减，且 $h(0)=0$，

∴当 $-1<x_0\leqslant 0$ 时，$f'(x_0)\geqslant 0$，那么函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 递增，此时函数 $f(x)$ 无极值；

当 $x_0>0$ 时，$f'(x_0)<0$，当 $x\to -1$ 时，$f'(x)\to+\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$f'(x)\to+\infty$.

所以 $f'(x)$ 在 $(-1,x_0)$ 和 $(x_0,+\infty)$ 内各有一个零点，

即函数 $f(x)$ 在 $(-1,x_0)$ 和 $(x_0,+\infty)$ 内各有一个极值合计两个极值，…………………………… (11 分)

此时，因为 $\frac{1}{a}=(x_0+1)e^{x_0}>1$，所以 $0<a<1$.

综上所述，当且仅当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$ 有两个极值点.………………………………………… (12 分)

(二)选考题. 请考生在第 22～23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.**【解析】**(1)由 $\rho=2\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ 得 $\rho=2\cos\theta+2\sin\theta$，

即：$\rho^2=2\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta$，将 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 代入得

$(x-1)^2+(y-1)^2=2$，

即 C_2 表示以 $(1,1)$ 为圆心，半径为 $\sqrt{2}$ 的圆. ……………………………………………………… (5 分)

(2)将 C_1 的参数方程代入 C_2 的普通方程，得

$t^2-(6\cos\alpha+2\sin\alpha)t+8=0$，

曲线 C_1 与 C_2 有且仅有一个公共点，故方程有相等两根，

$\Delta=(6\cos\alpha+2\sin\alpha)^2-32=0$，

整理得：$\cos^2\alpha+6\sin\alpha\cdot\cos\alpha-7\sin^2\alpha=0$，

即：$\cos\alpha=\sin\alpha$ 或者 $\cos\alpha=-7\sin\alpha$，

则 $\tan\alpha=1$ 或者 $\tan\alpha=-\frac{1}{7}$. ……………………………………………………………… (10 分)

23.**【解析】**(1)当 $x\leqslant 0$ 时，

$f(x)=-2x-3+x=-x-3\geqslant -3$；

当 $0<x\leqslant 3$ 时，

$f(x)=2x-3+x=3x-3>-3$；

当 $x>3$ 时，

$f(x)=2x-x+3=x+3>6$.

综合可知：$f(x)$ 的最小值为 -3. ………………………………………………………………… (5 分)

(2)由(1)知 $m=-3$，$a+b+c=-3$，

法一：$a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{(a+b)^2}{2}+c^2=\frac{(c+3)^2}{2}+c^2=\frac{3c^2+6c+9}{2}=\frac{3(c+1)^2}{2}+3\geqslant 3$.

当且仅当 $a=b=c=-1$ 时取“=”.

即 $a^2+b^2+c^2\geqslant 3$. ……………………………………………………………………………… (10 分)

法二：由柯西不等式得：$(a^2+b^2+c^2)(1+1+1)\geqslant(a+b+c)^2=9$，

即 $a^2+b^2+c^2\geqslant 3$.

当且仅当 $a=b=c=-1$ 时取“=”，

即 $a^2+b^2+c^2\geqslant 3$. ……………………………………………………………………………… (10 分)