湖北省高中名校联盟2023届新高三第一次联合测评
数学试题参考答案与评分细则

一、选择题:

1.B 2.A 3.D 4.B 5.D 6.C 7.A 8.D

二、多项选择题:

9.ABD 10.ACD 11.ABD 12.ABC

三、填空题:

13.e^2 14.$\sqrt{5}$ 15.8 16.$b<a<c$

四、解答题:

17.(本小题满分10分)

(1)当$n=1$时,$a_1=3$,

当$n\geqslant 2$时,$\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3^2}a_2+\frac{1}{3^3}a_3+\cdots+\frac{1}{3^n}a_n=n$①

$\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3^2}a_2+\frac{1}{3^3}a_3+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}a_{n-1}=n-1$②

由①-②得$\frac{1}{3^n}a_n=n-(n-1)=1$,即$a_n=3^n\ (n\geqslant 2)$.

当$n=1$时也成立,所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3^n\ (n\in N^*)$ ……5分

(2)因为$b_n=\log_3 a_n=\log_3 3^n=n$, ……6分

所以$\frac{1}{b_{n+1}b_{n+2}b_{n+3}}=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$, ……8分

所以$T_n=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$.

……10分

18.(本小题满分12分)(1)因为D为BC的中点,所以$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,

$\therefore \overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})$.记角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$,

因为$\tan A=\frac{4}{3}$.所以$\sin\angle CAB=\frac{4}{5}$,$\cos\angle CAB=\frac{3}{5}$,

则$18=\frac{1}{4}(c^2+b^2+2bc\cdot\frac{3}{5})$

又由余弦定理得:$18=c^2+b^2-2bc\cdot\frac{3}{5}$

两式联立解得:$bc=\frac{45}{2}$,所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin\angle CAB=\frac{1}{2}\times\frac{45}{2}\times\frac{4}{5}=9$. ……6分

(2)$\because\angle DAB=45^\circ$,$\tan A=\frac{4}{3}$,

$\therefore \tan\angle CAD=\tan(\angle CAB-\angle DAB)=\dfrac{\frac{4}{3}-1}{1+\frac{4}{3}}=\dfrac{1}{7}$，$\sin\angle CAD=\dfrac{1}{5\sqrt{2}}$

$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle CAD}+S_{\triangle BAD}=\dfrac{1}{2}b\cdot 3\sqrt{2}\sin\angle CAD+\dfrac{1}{2}c\cdot 3\sqrt{2}\sin\angle DAB$

$=\dfrac{1}{2}bc\sin\angle CAB$

即$\dfrac{3}{5}b+3c=\dfrac{4}{5}bc$ ……9 分

即$\dfrac{3}{5}b+3c=\dfrac{4}{5}bc\geqslant 2\sqrt{\dfrac{3}{5}b\cdot 3c}$，$bc\geqslant\dfrac{45}{4}$(当且仅当$\dfrac{b}{5}=c$ 时取得最小值)

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin\angle CAB\geqslant\dfrac{1}{2}\times\dfrac{45}{4}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{9}{2}$ ……12 分

19.(本小题满分 12 分)(1)由题知：$X=1,2,3,4$，

$P(X=1)=\dfrac{C_1^1C_8^1}{C_9^2}=\dfrac{2}{9}$，$P(X=2)=\dfrac{C_8^2C_6^1C_1^1}{C_9^2C_7^2}=\dfrac{2}{9}$，

$P(X=3)=\dfrac{C_8^2C_6^2C_4^1C_1^1}{C_9^2C_7^2C_5^2}=\dfrac{2}{9}$，$P(X=4)=\dfrac{C_8^2C_6^2C_4^2C_2^2+C_8^2C_6^2C_4^2C_2^1C_1^1}{C_9^2C_7^2C_5^2C_3^2}=\dfrac{1}{3}$，

分布列为：

X	1	2	3	4
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$

……(8 分)

(2)由(1)知：$E(X)=1\times\dfrac{2}{9}+2\times\dfrac{2}{9}+3\times\dfrac{2}{9}+4\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{24}{9}$，

设方案二的称量次数为随机变量为 Y，则 $Y=1,3$，

$P(Y=1)=\dfrac{C_8^8}{C_9^8}=\dfrac{1}{9}$，$P(Y=3)=1-\dfrac{1}{9}=\dfrac{8}{9}$，

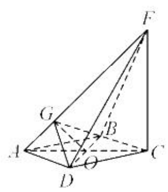
$E(Y)=1\times\dfrac{1}{9}+3\times\dfrac{8}{9}=\dfrac{25}{9}>E(X)$.

所以小明应选择方案一可使称量次数的期望较小. ……(12 分)

20.(本小题满分 12 分)试题解析：(1)方法一：如图(1)连结 AC、BD 交于菱形的中心 O，过 O 作 $OG\perp AF$，G 为垂足. 连结 BG、DG.

由 $BD\perp AC$，$BD\perp CF$，得 $BD\perp$平面 ACF，故 $BD\perp AF$. 于是 $AF\perp$平面 BGD，

所以 $BG\perp AF$，$DG\perp AF$，$\angle BGD$ 为二面角 $B-AF-D$ 的平面角. ……3 分



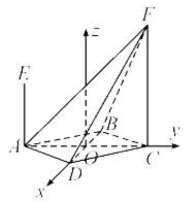
由 $FC\perp AC$，$FC=AC=2$，得$\angle FAC=\dfrac{\pi}{4}$，$OG=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

由 $OB\perp OG$，$OB=OD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，得$\angle BGD=2\angle BGO=\dfrac{\pi}{2}$.

即二面角 $B-AF-D$ 的大小为$\dfrac{\pi}{2}$. ……6 分

方法二：设 AC 与 BD 交点为 O，以 O 为坐标原点，分别以 BD 、AC 所在直线为 x 轴，

y 轴建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(0,-1,0)$，$B(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,0)$，$D(\frac{\sqrt{2}}{2},0,0)$，$F(0,1,2)$，

$\overrightarrow{AF}=(0,2,2)$，$\overrightarrow{AB}=(-\frac{\sqrt{2}}{2},1,0)$，$\overrightarrow{AD}=(\frac{\sqrt{2}}{2},1,0)$ ……2 分

设平面 ABF，平面 ADF 的法向量分别为 $\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$，

设 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$

由 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AF}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y+z=0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x+y=0\end{cases}$

令 $\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{2},1,-1)$ ……4 分

同理可得 $\overrightarrow{n_2}=(\sqrt{2},-1,1)$ $\therefore\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=2-1-1=0$，$\therefore\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$

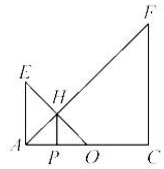
$\therefore$ 二面角 $B-AF-D$ 的大小为 $\frac{\pi}{2}$． ……6 分

(2)连 EB、ED，设直线 AF 与平面 EBD 相交于点 H，

则三棱锥 $E-ABD$ 与四棱锥 $F-ABCD$ 的公共部分为三棱锥 $H-ABD$．

H 即为直线 EO 与 FA 的交点，作 $HP\perp$ 平面 $ABCD$，因为平面 $ACFE\perp$ 平面 $ABCD$，

从而 $P\in AC$，$HP\perp AC$． ……7 分



由平面几何知识，得 $HP=\frac{1}{2}$． ……9 分

又因为 $S_{\triangle ABD}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

故三棱锥 $H-ABD$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{12}$．……12 分

21．(本小题满分 12 分)(1)若直线 l 斜率存在，设其方程为 $y=kx+b$．

因为点 P 在直线 l 上，所以 $-\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}k+b\Rightarrow b=-\frac{1}{3}(\sqrt{2}k+1)$．

联立直线 l 和椭圆 C 的方程消去 y 得 $(2k^2+1)x^2+4kbx+2b^2-4=0$．

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$．则

$x_1+x_2=-\frac{4kb}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{2b^2-4}{2k^2+1}$，

$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2b=-\frac{4k^2b}{2k^2+1}+2b=\frac{2b}{2k^2+1}$，

$y_1y_2=(kx_1+b)(kx_2+b)=k^2x_1x_2+kb(x_1+x_2)+b^2=k^2\cdot\frac{2b^2-4}{2k^2+1}+kb\left(-\frac{4kb}{2k^2+1}\right)+b^2=\frac{b^2-4k^2}{2k^2+1}$．

注意到 $\overrightarrow{QA}=(x_1-\sqrt{2},y_1-1)$，

$\overrightarrow{QB}=(x_2-\sqrt{2},y_2-1)$．

则 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=(x_1-\sqrt{2})(x_2-\sqrt{2})+(y_1-1)(y_2-1)$

$=x_1x_2-\sqrt{2}(x_1+x_2)+2+y_1y_2-(y_1+y_2)+1$

$=\dfrac{2b^2-4}{2k^2+1}+\sqrt{2}\times\dfrac{4kb}{2k^2+1}+\dfrac{b^2-4k^2}{2k^2+1}-\dfrac{2b}{2k^2+1}+3$

$=\dfrac{1}{2k^2+1}[3b^2+2k^2+2b(2\sqrt{2}k-1)-1]$

$=\dfrac{1}{2k^2+1}(3b+\sqrt{2}k+1)(b+\sqrt{2}k-1)$

$=0$.

故$\overrightarrow{QA}\perp\overrightarrow{QB}$. ……5 分

显然,A、Q、B 三点互不相同.所以,$\angle AQB=90°$.

若直线 l 斜率不存在,则 A、B 两点的坐标为$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3},\pm\dfrac{\sqrt{17}}{3}\right)$.

容易验证$\angle AQB=90°$也成立.因此,$\angle AQB=90°$. ……6 分

(2)由(1)知$\angle AQB=90°$.所以 $k_{QA}\cdot k_{QB}=-1$.

又因为 $k_{QA}+k_{QB}=0$,则不妨设 $k_{QA}=1$

则直线 QA 方程为:$y=x-\sqrt{2}+1$

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ y=x-\sqrt{2}+1\end{cases}$ 解得点 $A(\dfrac{\sqrt{2}-4}{3},-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}-\dfrac{1}{3})$

又 $k_{AB}=k_{PA}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

则直线 AB 方程为:$y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-\dfrac{\sqrt{2}}{3})-\dfrac{1}{3}$,即 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\dfrac{2}{3}$

$\therefore$点 Q 到直线 AB 的距离为 $d=\dfrac{\left|1-1-\dfrac{2}{3}\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{2}+1}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\dfrac{2}{3}\end{cases}$,解得弦长 $|AB|=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

$S_{\triangle QAB}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\sqrt{6}}{9}\times\dfrac{4\sqrt{6}}{3}=\dfrac{8}{9}$ ……12 分

22.(本小题满分 12 分)解:因为 $f'(x)=e^x+x-a$,$f'(x)$在 R 上单调递增,

又 $a\in R$,所以存在唯一 x_0,使 $f'(x_0)=e^{x_0}+x_0-a=0$,即 $a=e^{x_0}+x_0$,

当 $x\in(-\infty,x_0)$时,$f'(x)<0$,当 $x\in(x_0,+\infty)$时,$f'(x)>0$,

所以 $f(x)$在区间$(-\infty,x_0)$上单调递减,在$(x_0,+\infty)$上单调递增,

所以 $f(x)$的极小值为 $f(x_0)=e^{x_0}+\dfrac{1}{2}x_0^2-ax_0+1=e^{x_0}+\dfrac{1}{2}x_0^2-(e^{x_0}+x_0)x_0+1$,

所以 $h(a)=(1-x_0)e^{x_0}-\dfrac{1}{2}x_0^2+1$,

令 $g(x_0)=(1-x_0)e^{x_0}-\dfrac{1}{2}x_0^2+1$,

$g'(x)=-x(x^2+2)$，

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $h(a)_{max}=g(0)=2$，即 $h(a)$ 的最大值为 2； ……6 分

(2)解：不妨设 $x_1=\frac{1}{2}-t, x_2=\frac{1}{2}+t(t>0)$，所以关于 t 的方程 $f(1-t)=f(1+t)$ 有正实数解，

所以 $e^{\frac{1}{2}\ t}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-t\right)^2-a\left(\frac{1}{2}-t\right)+1=e^{\frac{1}{2}+t}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+t\right)^2-a\left(\frac{1}{2}+t\right)+1$，即 $e^{\frac{1}{2}+t}-e^{\frac{1}{2}\ t}+(1-2a)$

$t=0$ 有正实数解，设 $F(t)=e^{\frac{1}{2}+t}-e^{\frac{1}{2}-t}+(1-2a)t,(t>0)$，

则 $F'(t)=e^{\frac{1}{2}+t}+e^{\frac{1}{2}-t}+1-2a$，，所以 $F'(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $F'(t)>F'(0)=2e^{\frac{1}{2}}+1-2a$，

①当 $a\leqslant\frac{1}{2}+\sqrt{e}$ 时，$F'(t)>0$，所以 $F(t)$ 单调递增，所以 $F(t)>F(0)=0$，不合题意；

②当 $a>\frac{1}{2}+\sqrt{e}$ 时，存在 $t_1>0$，使得 $F'(t_1)=0$，

当 $t\in(0,t_1)$ 时，$F'(t)<0$，当 $t\in(t_1,+\infty)$ 时，$F'(t)>0$，

所以 $F(t)$ 在 $(0,t_1)$ 上单调递减，在 $(t_1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $F(t_1)<F(0)=0$，

所以存在 $t_2>t_1$，使得 $F(t_2)=0$，符合题意.综上，a 的取值范围为 $(\frac{1}{2}+\sqrt{e},+\infty)$. ……12 分