

凉山州 2023 届高中毕业班第一次诊断性检测

数 学(理科)

本试卷分选择题和非选择题两部分. 第 I 卷(选择题), 第 II 卷(非选择题), 共 4 页, 满分 150 分, 考试时间 120 分钟.

注意事项:

1. 答题前, 考生务必将自己的姓名、座位号、准考证号用 0.5 毫米的黑色签字笔填写在答题卡上, 并检查条形码粘贴是否正确.
2. 选择题使用 2B 铅笔涂在答题卡对应题目标号的位置上; 非选择题用 0.5 毫米黑色签字笔写在答题卡的对应框内, 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸、试题卷上答题无效.
3. 考试结束后, 将答题卡收回.

第 I 卷(选择题, 共 60 分)

一、选择题(本大题共 12 小题, 每题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.)

1. 已知复数 z 满足 $\frac{1-3i}{z} = 1+i$, $\bar{z}$ 是 z 的共轭复数, 则 $z+\bar{z}$ 等于()

- A. $-2i$ B. -2 C. $-4i$ D. -1

2. 从某中学甲、乙两班各随机抽取 10 名同学的数学成绩, 所得数据用茎叶图表示如下. 由此可估计甲、乙两班同学的数学成绩情况, 则下列结论正确的是()

- A. 甲班数学成绩的中位数比乙班大
B. 甲班数学成绩的平均值比乙班小
C. 甲乙两班数学成绩的极差相等
D. 甲班数学成绩的方差比乙班大

甲班	乙班
1	5
3 2 0	6 3 3 7
6 3 3	7 2
2 1	8 1 2 3
3	9 2

3. 设集合 $A = \{-1, 2^0, e^{\ln 2}, \frac{\ln 2}{2}\}$, $B = \{1, 2, \ln e^3, \frac{\ln 4}{4}\}$, 则 $A \cap B$ 的子集个数为()

- A. 2 B. 4 C. 8 D. 16

4. 设 $x \in \mathbb{R}$, 向量 $a = (x, 1)$, $b = (1, -1)$, 且 $a \perp b$, 则 $|a-b| =$ ()

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

5. 已知 F 为抛物线 $T: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点, 过 F 作垂直 x 轴的直线交抛物线于 M, N 两点, 以 MN 为直径的圆交 y 轴于 C, D 两点, 若 $|CD| = 2\sqrt{3}$, 则 T 的方程为()

- A. $y^2 = 2x$ B. $y^2 = 4x$ C. $y^2 = 2\sqrt{3}x$ D. $y^2 = 6x$

6. 一元二次方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的两根 x_1, x_2 满足 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 x_2 = c \end{cases}$, 这个结论我们可以推广到一元三次方程

中. 设 x_1, x_2, x_3 为函数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ 的三个零点, 则下列结论正确的是()

- A. $x_1 + x_2 + x_3 = -6$ B. $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = -11$ C. $x_1 x_2 x_3 = -6$ D. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{11}{6}$

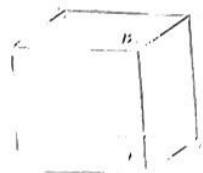


7. 我国古代数学家刘徽在其撰写的《海岛算经》中，提出了著名的望海岛问题：今有望海岛，立两表，齐高三丈，前后相去千步，今前表与后表三共直，从前表却行一百二十三步，人目着地取望岛峰，与表末三合，从后表却行一百二十七步，亦与表末三合，问岛高及去表各几何。这一方法领先印度500多年，领先欧洲1300多年。其大意为：测量望海岛AB的高度及海岛离海岸的距离，在海岸边立两等高标杆DE,FG(AB,DE,FG共面，均垂直于地面)，使目测点H与B,D共线，目测点C与B,F共线，测出EH,GC,EC，即可求出岛高AB和AE的距离(如图)。若DE=FG=3, EH=7, HC=12, GC=9，则海岛的高AB=()

A. 18
B. 16
C. 12
D. 21

8. 如图，在棱长为6的正方体ABCD-A₁B₁C₁D₁中，O是底面正方形ABCD的中心，点M在DD₁上，点N在A₁B₁上，若ON⊥AM，则DM=()

A. 1
B. 2
C. 4
D. 3



9. 定义 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ ，已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，且 $a_1 = 2$ ， $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0$ ，则 $a_5 = ()$

A. $2\sqrt{2}$ B. $\pm 2\sqrt{2}$ C. 4 D. ± 4

10. 小明去参加法制知识答题比赛，比赛共有A, B, C三道题且每个问题的回答结果相互独立。已知三道题的分值和小明答对每道题的概率如表：

	A 题分值: 3分	B 题分值: 3分	C 题分值: 4分
答对的概率	0.6	0.5	

记小明所得总分为X(分)，则 $\frac{P(X=3)}{P(X=10)} = ()$

A. $\frac{5}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{11}{15}$ D. $\frac{55}{6}$

11. 已知函数 $f(x) = \sin^2(\omega x - \frac{\pi}{2}) - \cos^2(\omega x + \frac{3\pi}{2})$ ($\omega > 0$)，关于函数 $f(x)$ 有如下四个命题：

① $f(x)$ 的最小正周期是 $\frac{\pi}{\omega}$ ；

② 若 $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{\omega}$ 处取得极值，则 $\omega = 1$ ；

③ 把 $f(x)$ 的图象向右平行移动 $\frac{\pi}{4\omega}$ 个单位长度，所得的图象关于坐标原点对称；

④ $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{a}]$ 上单调递减，则 $\frac{a^2 + \omega^2}{a\omega}$ 的最小值为 $\frac{5}{2}$ 。

其中真命题的个数为()

B. 2

C. 3

12. 已知 $f(x) = e^x - ax$ 有两个零点 x_1, x_2 ，且 $x_1 < x_2$ ，则()

B. $f(x_1) + f(x_2) > 0$

C. $f(x_1) > f(x_2)$

D. $2f(x_1) < f(x_2) + f(x_1)$

(12)

第 II 卷(非选择题, 110 分)

二、填空题(共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

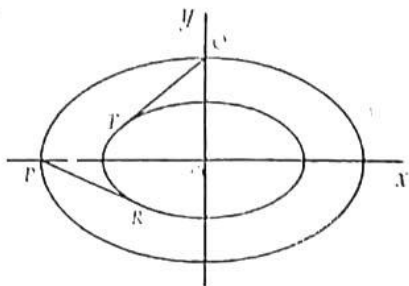
13. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-2 \leq 0 \\ x-y+2 \geq 0 \\ x+2y-2 \geq 0 \end{cases}$, 则目标函数 $z=x+y$ 的最小值为

14. $(1-\frac{1}{x})(x+1)^6$ 展开式中 x^4 的系数为 (用数字作答).

15. 把正整数按如下规律排列: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, …… 构成数列 $\{a_n\}$, 则 $a_{11} =$.

16. 如图, 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $C_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = t$ ($a > b > 0, 0 < t < 1$).

若由椭圆 C_1 长轴一端点 P 和短轴一端点 Q 分别向椭圆 C_2 引切线 PR 和 QT , 若两切线斜率之积等于 $-\frac{1}{2}$, 则椭圆 C_2 的离心率 $e =$.



三、解答题(解答过程应写出必要的文字说明, 解答步骤, 共 70 分)

17. (12 分) 2022 年卡塔尔世界杯(英语: FIFA World Cup Qatar 2022)是第二十二届世界杯足球赛, 是历史上首次在卡塔尔和中东国家境内举行, 也是继 2002 年韩日世界杯之后时隔二十年第二次在亚洲举行的世界杯足球赛, 除此之外, 卡塔尔世界杯还是首次在北半球冬季举行, 第二次世界大战后首次由从未进过世界杯的国家举办的世界杯足球赛. 为了解某校学生对足球运动的兴趣, 随机从该校学生中抽取了 100 人进行调查, 其中女生 40 人对足球运动没兴趣的占女生人数的 $\frac{1}{4}$, 男生 15 人表示对足球运动没有兴趣.

(1) 完成 2×2 列联表, 并回答能否有 97.5% 的把握认为“该校学生对足球是否有兴趣与性别有关”?

	有兴趣	没兴趣	合计
男	75	15	90
女	30	10	40
合计	105	25	130

(2) 从样本中对足球没有兴趣的学生按性别分层抽样的方法抽取 6 名学生, 记从这 6 人中随机抽取 3 人, 抽到的男生人数为 X , 求 X 的分布列和期望.

$P(K \geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635

$$K^2 = \frac{n(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = a+b+c+d$$

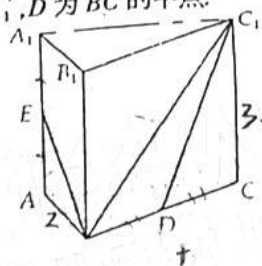
数学(理科)试卷 第 3 页(共 4 页)



18. (12分)如图,在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=CC_1=3$, $BC=4$, $AC=5$, $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AA_1}$, D 为 BC 的中点.

(1)当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时,求证: $AD\parallel$ 平面 BC_1E ;

(2)若 $\frac{1}{4}\leq\lambda\leq\frac{\sqrt{2}}{4}$, C_1D 与平面 BC_1E 所成的角为 θ ,求 $\sin\theta$ 的取值范围.



19. (12分)在锐角 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $b-c\sin A = a-c\sin A$.

(1)求 A ;

(2)若 $b=2$,求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

20. (12分)已知 A, B 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>b>0)$ 的上下顶点, $|AB|=2$,点 $(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 在椭圆 C 上, O 为坐标原点.

(1)求椭圆 C 的标准方程;

(2)直线 l 与椭圆 C 交于 x 轴上方两点 M, N .若 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = -1$,试判断直线 l 是否过定点?若是,求出定点坐标;若否,说明理由.

21. (12分)已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - (x+1)\ln(x+1) + x + t$.

(1) $g(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数,求 $g(x)$ 的最小值;

(2)已知 $n \in \mathbb{N}^*$,证明: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$;

(3)若 $x^2 - x \ln x + (2-a)x - 1 \geq 0$ 恒成立,求 a 的取值范围.

请考生在第22、23两题中选一题作答.注意:只能做所选定的题目.如果多做,则按所做的第一个题目计分,作答时请用2B铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.

22. (10分)[选修4-4:坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos\alpha \\ y = \cos 2\alpha \end{cases}$ (α 为参数),以坐标原点 O 为极

点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系,直线 l 的极坐标方程为 $\rho \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$.

(1)求直线 l 的直角坐标方程与曲线 C 的普通方程;

(2) P 是曲线 C 上的点,求 P 到 l 距离的最大值.

23. (10分)[选修4-5:不等式选讲]

已知函数 $f(x) = |x-2| + |2x+8|$.

(1)求不等式 $f(x) \leq 9$ 的解集;

(2)若 $f(x) \geq a^2 - a$ 恒成立,求实数 a 的取值.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线