



西城区高三统一测试

数 学(文科)

2017.4

本试卷分第Ⅰ卷和第Ⅱ卷两部分，第Ⅰ卷1至2页，第Ⅱ卷3至6页，共150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第Ⅰ卷 (选择题 共40分)

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，

选出符合题目要求的一项。

1. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，集合 $A = \{1, 3, 5\}$ ， $B = \{1, 4\}$ ，那么 $A \cap \complement_U B =$

- (A) $\{3, 5\}$ (B) $\{2, 4, 6\}$
(C) $\{1, 2, 4, 6\}$ (D) $\{1, 2, 3, 5, 6\}$

2. 在复平面内，复数 $\frac{1+i}{i}$ 的对应点位于

- (A) 第一象限 (B) 第二象限
(C) 第三象限 (D) 第四象限

3. 双曲线 $y^2 - \frac{x^2}{3} = 1$ 的焦点坐标是

- (A) $(0, \sqrt{2})$, $(0, -\sqrt{2})$ (B) $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$
(C) $(0, 2)$, $(0, -2)$ (D) $(2, 0)$, $(-2, 0)$

4. 函数 $f(x) = (\frac{1}{2})^x - \log_2 x$ 的零点个数为

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3



5. 函数 $f(x)$ 定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上, 则“曲线 $y=f(x)$ 过原点”是“ $f(x)$ 为奇函数”的

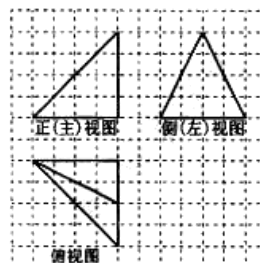
- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 满足 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BD}$, 则

- (A) $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ (B) $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$
(C) $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ (D) $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

7. 在正方形网格中, 某四面体的三视图如图所示. 如果小正方形网格的边长为 1, 那么该四面体最长棱的棱长为

- (A) $4\sqrt{3}$ (B) 6
(C) $4\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{5}$



8. 函数 $f(x)$ 的图象上任意一点 $A(x, y)$ 的坐标满足条件 $|x| \geq |y|$, 称函数 $f(x)$ 具有性质 P . 下列函数中, 具有性质 P 的是

- (A) $f(x)=x^2$ (B) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$
(C) $f(x)=\sin x$ (D) $f(x)=\ln(x+1)$

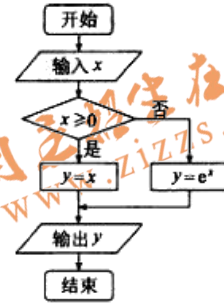


第 II 卷 (非选择题 共 110 分)

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ 的定义域为_____.

10. 执行如图所示的程序框图. 当输入 $x = \ln \frac{1}{2}$ 时, 输出的 y 值为_____.

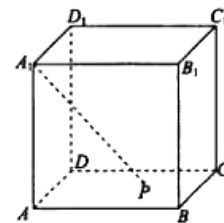


11. 圆 $C: x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 的圆心坐标是_____；直线 $l: x - y = 0$ 与圆 C 相交于 A, B 两点, 则 $|AB| =$ _____.

12. 函数 $f(x) = \frac{\sin 4x}{1 + \cos 4x}$ 的最小正周期是_____.

13. 实数 x, y 满足 $\begin{cases} x \leq 1, \\ y \leq 2, \\ 2x + y - 2 \geq 0, \end{cases}$ 则 $x^2 + y^2$ 的最大值是_____；最小值是_____.

14. 如图, 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 点 P 在正方形 $ABCD$ 的边界及其内部运动. 平面区域 W 由所有满足 $A_1P \geq \sqrt{5}$ 的点 P 组成, 则 W 的面积是_____.



北京市西城区 2017 年 4 月高三数学试卷(文科) 第 3 页(共 6 页)



三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (本小题满分 13 分)

已知 $\{a_n\}$ 是等比数列， $a_1=3, a_4=24$ 。数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1, b_4=-8$ ，且 $\{a_n+b_n\}$ 是等差数列。

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(II) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和。

16. (本小题满分 13 分)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $a \tan C = 2c \sin A$ 。

(I) 求角 C 的大小；

(II) 求 $\sin A + \sin B$ 的最大值。

17. (本小题满分 13 分)

在测试中，客观题难度的计算公式为 $P_i = \frac{R_i}{N}$ ，其中 P_i 为第 i 题的难度， R_i 为答对该题的人数， N 为参加测试的总人数。

现对某校高三年级 120 名学生进行一次测试，共 5 道客观题。测试前根据对学生的了解，预估了每道题的难度，如下表所示：

题号	1	2	3	4	5
考前预估难度 P_i	0.9	0.8	0.7	0.6	0.4



测试后，从中随机抽取了 10 名学生，将他们编号后统计各题的作答情况，如下表所示（“√”表示答对，“×”表示答错）：

学生编号 \ 题号	1	2	3	4	5
1	×	√	√	√	√
2	√	√	√	√	×
3	√	√	√	√	×
4	√	√	√	×	×
5	√	√	√	√	√
6	√	×	×	√	×
7	×	√	√	√	×
8	√	×	×	×	×
9	√	√	×	×	×
10	√	√	√	√	×

(I) 根据题中数据，将抽样的 10 名学生每道题实测的答对人数及相应的实测难度填入下表，并估计这 120 名学生中第 5 题的实测答对人数；

题号	1	2	3	4	5
实测答对人数					
实测难度					

(II) 从编号为 1 到 5 的 5 人中随机抽取 2 人，求恰好有 1 人答对第 5 题的概率；

(III) 定义统计量 $S = \frac{1}{n} [(P'_1 - P_1)^2 + (P'_2 - P_2)^2 + \dots + (P'_n - P_n)^2]$ ，其中 P'_i 为第 i 题的实测难度， P_i 为第 i 题的预估难度 ($i = 1, 2, \dots, n$)。规定：若 $S < 0.05$ ，则称该次测试的难度预估合理，否则为不合理。判断本次测试的难度预估是否合理。

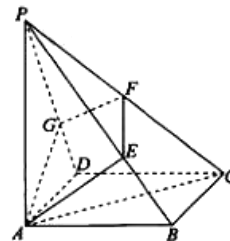
18. (本小题满分 14 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ， $PA = AC$ 。过点 A 的平面与棱 PB ， PC ， PD 分别交于点 E ， F ， G (E ， F ， G 三点均不在棱的端点处)。

(I) 求证：平面 $PAB \perp$ 平面 PBC ；

(II) 若 $PC \perp$ 平面 $AEFG$ ，求 $\frac{PF}{PC}$ 的值；

(III) 直线 AE 是否可能与平面 PCD 平行？证明你的结论。





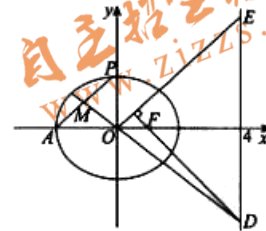
19. (本小题满分 14 分)

如图, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, F 为椭圆 C 的右焦点.

$A(-a, 0)$, $|AF| = 3$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 设 O 为原点, P 为椭圆上一点, AP 的中点为 M . 直线 OM 与直线 $x=4$ 交于点 D , 过 O 作 $OE \perp DF$, 交直线 $x=4$ 于点 E . 求证: $OE \parallel AP$.



20. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2$. 设 l 为曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线,

其中 $x_0 \in [-1, 1]$.

(I) 求直线 l 的方程 (用 x_0 表示);

(II) 求直线 l 在 y 轴上的截距的取值范围;

(III) 设直线 $y = a$ 分别与曲线 $y = f(x)$ 和射线 $y = x - 1 (x \in [0, +\infty))$ 交于 M , N 两点, 求 $|MN|$ 的最小值及此时 a 的值.



西城区高三统一测试

数学（文科）参考答案及评分标准

2017.4

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1. A 2. D 3. C 4. B
5. B 6. C 7. B 8. C

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9. $\{x|x \geq 0, \text{ 且 } x \neq 1\}$ 10. $\frac{1}{2}$ 11. (1,1); 2
12. $\frac{\pi}{2}$ 13. 5; $\frac{4}{5}$ 14. $4 - \frac{\pi}{4}$

注：第 11, 13 题第一空 2 分，第二空 3 分。

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。其他正确解答过程，请参照评分标准给分。

15. (本小题满分 13 分)

解：(I) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，由题意得

$$q^3 = \frac{a_4}{a_1} = 8, \text{ 解得 } q = 2. \quad [2 \text{ 分}]$$

$$\text{所以 } a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1} \quad (n=1,2,\dots). \quad [4 \text{ 分}]$$

设等差数列 $\{a_n + b_n\}$ 的公差为 d ，由题意得

$$d = \frac{(a_4 + b_4) - (a_1 + b_1)}{4-1} = \frac{16-4}{3} = 4. \quad [6 \text{ 分}]$$

$$\text{所以 } a_n + b_n = (a_1 + b_1) + (n-1)d = 4n. \quad [8 \text{ 分}]$$

$$\text{从而 } b_n = 4n - 3 \cdot 2^{n-1} \quad (n=1,2,\dots). \quad [9 \text{ 分}]$$

(II) 由 (I) 知 $b_n = 4n - 3 \cdot 2^{n-1} \quad (n=1,2,\dots)$.

数列 $\{4n\}$ 的前 n 项和为 $2n(n+1)$ ；数列 $\{3 \cdot 2^{n-1}\}$ 的前 n 项和为 $3 \cdot (2^n - 1)$. [12 分]

所以，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $2n^2 + 2n - 3 \cdot 2^n + 3$. [13 分]



16. (本小题满分 13 分)

解：(I) 由 $a \tan C = 2c \sin A$,

$$\text{得 } \frac{a}{c} \cdot \frac{\sin C}{\cos C} = 2 \sin A. \quad [1 \text{ 分}]$$

$$\text{由正弦定理得 } \frac{\sin A}{\sin C} \cdot \frac{\sin C}{\cos C} = 2 \sin A. \quad [3 \text{ 分}]$$

$$\text{所以 } \cos C = \frac{1}{2}. \quad [4 \text{ 分}]$$

因为 $C \in (0, \pi)$, [5 分]

$$\text{所以 } C = \frac{\pi}{3}. \quad [6 \text{ 分}]$$

$$\text{(II) } \sin A + \sin B = \sin A + \sin\left(\frac{2\pi}{3} - A\right) \quad [7 \text{ 分}]$$

$$= \frac{3}{2} \sin A + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A \quad [9 \text{ 分}]$$

$$= \sqrt{3} \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right). \quad [11 \text{ 分}]$$

因为 $C = \frac{\pi}{3}$, 所以 $0 < A < \frac{2\pi}{3}$, [12 分]

所以 当 $A = \frac{\pi}{3}$ 时, $\sin A + \sin B$ 取得最大值 $\sqrt{3}$. [13 分]

17. (本小题满分 13 分)

解：(I) 每道题实测的答对人数及相应的实测难度如下表：

题号	1	2	3	4	5
实测答对人数	8	8	7	7	2
实测难度	0.8	0.8	0.7	0.7	0.2

所以, 估计 120 人中有 $120 \times 0.2 = 24$ 人答对第 5 题. [4 分]

(II) 记编号为 i 的学生为 A_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), [5 分]

从这 5 人中随机抽取 2 人, 不同的抽取方法有 10 种.

其中恰好有 1 人答对第 5 题的抽取方法为 (A_1, A_2) , (A_1, A_4) , (A_1, A_5) , (A_2, A_3) ,

(A_3, A_4) , (A_4, A_5) , 共 6 种. [9 分]

所以, 从抽样的 10 名学生中随机抽取 2 名答对至少 4 道题的学生, 恰好有 1 人答对第 5 题

的概率为 $P = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. [10 分]



(III) P_i' 为抽样的 10 名学生中第 i 题的实测难度，用 P_i' 作为这 120 名学生第 i 题的实测难度.

$$S = \frac{1}{5}[(0.8-0.9)^2 + (0.8-0.8)^2 + (0.7-0.7)^2 + (0.7-0.6)^2 + (0.2-0.4)^2]$$

$$= 0.012. \quad [12 \text{ 分}]$$

因为 $S = 0.012 < 0.05$,

所以，该次测试的难度预估是合理的. [13 分]

18. (本小题满分 14 分)

解：(I) 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $PA \perp BC$.

因为 $ABCD$ 为正方形,

所以 $AB \perp BC$,

所以 $BC \perp$ 平面 PAB .

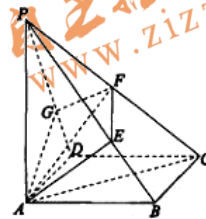
所以平面 $PAB \perp$ 平面 PBC .

[1 分]

[2 分]

[3 分]

[4 分]



(II) 连接 AF .

[5 分]

因为 $PC \perp$ 平面 $AEFG$,

所以 $PC \perp AF$.

[7 分]

又因为 $PA = AC$,

所以 F 是 PC 的中点.

[8 分]

所以 $\frac{PF}{PC} = \frac{1}{2}$.

[9 分]

(III) AE 与平面 PCD 不可能平行.

[10 分]

证明如下:

假设 $AE \parallel$ 平面 PCD ,

因为 $AB \parallel CD$, $AB \not\subset$ 平面 PCD .

所以 $AB \parallel$ 平面 PCD .

[12 分]

而 $AE, AB \subset$ 平面 PAB ,

所以平面 $PAB \parallel$ 平面 PCD , 这显然矛盾!

[13 分]

所以假设不成立,

即 AE 与平面 PCD 不可能平行.

[14 分]



19. (本小题满分 14 分)

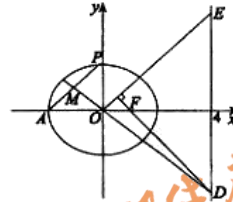
解：(1) 设椭圆 C 的半焦距为 c . 依题意, 得

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \quad a + c = 3. \quad [2 \text{ 分}]$$

$$\text{解得 } a = 2, \quad c = 1.$$

$$\text{所以 } b^2 = a^2 - c^2 = 3,$$

$$\text{所以椭圆 } C \text{ 的方程是 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1. \quad [5 \text{ 分}]$$



(II) 解法一: 由 (1) 得 $A(-2,0)$. 设 AP 的中点 $M(x_0, y_0)$, $P(x_1, y_1)$.

设直线 AP 的方程为: $y = k(x+2)$ ($k \neq 0$), 将其代入椭圆方程, 整理得

$$(4k^2 + 3)x^2 + 16k^2x + 16k^2 - 12 = 0, \quad [7 \text{ 分}]$$

$$\text{所以 } -2 + x_1 = \frac{-16k^2}{4k^2 + 3}. \quad [8 \text{ 分}]$$

$$\text{所以 } x_0 = \frac{-8k^2}{4k^2 + 3}, \quad y_0 = k(x_0 + 2) = \frac{6k}{4k^2 + 3},$$

$$\text{即 } M\left(\frac{-8k^2}{4k^2 + 3}, \frac{6k}{4k^2 + 3}\right). \quad [9 \text{ 分}]$$

$$\text{所以直线 } OM \text{ 的斜率是 } \frac{\frac{6k}{4k^2 + 3}}{\frac{-8k^2}{4k^2 + 3}} = -\frac{3}{4k}, \quad [10 \text{ 分}]$$

$$\text{所以直线 } OM \text{ 的方程是 } y = -\frac{3}{4k}x. \text{ 令 } x = 4, \text{ 得 } D\left(4, -\frac{3}{k}\right). \quad [11 \text{ 分}]$$

$$\text{由 } F(1,0), \text{ 得直线 } DF \text{ 的斜率是 } \frac{-\frac{3}{k}}{4-1} = -\frac{1}{k}, \quad [12 \text{ 分}]$$

$$\text{因为 } OE \perp DF, \text{ 所以直线 } OE \text{ 的斜率为 } k, \quad [13 \text{ 分}]$$

$$\text{所以直线 } OE \parallel AP. \quad [14 \text{ 分}]$$

解法二: 由 (1) 得 $A(-2,0)$. 设 $P(x_1, y_1)$ ($x_1 \neq \pm 2$), 其中 $3x_1^2 + 4y_1^2 - 12 = 0$.

$$\text{因为 } AP \text{ 的中点为 } M, \text{ 所以 } M\left(\frac{x_1 - 2}{2}, \frac{y_1}{2}\right). \quad [6 \text{ 分}]$$

$$\text{所以直线 } OM \text{ 的斜率是 } k_{OM} = \frac{y_1}{x_1 - 2}, \quad [7 \text{ 分}]$$

$$\text{所以直线 } OM \text{ 的方程是 } y = \frac{y_1}{x_1 - 2}x. \text{ 令 } x = 4, \text{ 得 } D\left(4, \frac{4y_1}{x_1 - 2}\right). \quad [8 \text{ 分}]$$



由 $F(1,0)$ ，得直线 DF 的斜率是 $k_{DF} = \frac{4y_1}{3(x_1-2)}$. [9分]

因为直线 AP 的斜率是 $k_{AP} = \frac{y_1}{2+x_1}$, [10分]

所以 $k_{DF} \cdot k_{AP} = \frac{4y_1^2}{3(x_1^2-4)} = -1$, [12分]

所以 $AP \perp DF$. [13分]

因为 $OE \perp DF$,

所以 $OE \parallel AP$. [14分]

20. (本小题满分 13 分)

解：(I) 对 $f(x)$ 求导数，得 $f'(x) = e^x - x$. [1分]

所以切线 l 的斜率为 $f'(x_0) = e^{x_0} - x_0$, [2分]

由此得切线 l 的方程为： $y - (e^{x_0} - \frac{1}{2}x_0^2) = (e^{x_0} - x_0)(x - x_0)$,

即 $y = (e^{x_0} - x_0)x + (1 - x_0)e^{x_0} + \frac{1}{2}x_0^2$. [3分]

(II) 由 (I) 得，直线 l 在 y 轴上的截距为 $(1 - x_0)e^{x_0} + \frac{1}{2}x_0^2$. [4分]

设 $g(x) = (1 - x)e^x + \frac{1}{2}x^2$, $x \in [-1, 1]$.

所以 $g'(x) = x(1 - e^x)$ ，令 $g'(x) = 0$ ，得 $x = 0$.

$g(x)$, $g'(x)$ 的变化情况如下表：

x	-1	(-1, 0)	0	(0, 1)	1
$g'(x)$	-	-	0	-	-
$g(x)$	$\frac{2}{e} + \frac{1}{2}$	\searrow	1	\searrow	$\frac{1}{2}$

所以函数 $g(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递减, [6分]

所以 $[g(x)]_{\max} = g(-1) = \frac{2}{e} + \frac{1}{2}$, $[g(x)]_{\min} = g(1) = \frac{1}{2}$,

所以直线 l 在 y 轴上的截距的取值范围是 $[\frac{1}{2}, \frac{2}{e} + \frac{1}{2}]$. [8分]



(III) 过 M 作 x 轴的垂线，与射线 $y=x-1$ 交于点 Q ，

所以 $\triangle MNQ$ 是等腰直角三角形。 [9分]

所以 $|MN|=|MQ|=|f(x)-g(x)|=|e^x-\frac{1}{2}x^2-x+1|$. [10分]

设 $h(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x+1$, $x \in [0,+\infty)$,

所以 $h'(x)=e^x-x-1$.

令 $k(x)=e^x-x-1$, 则 $k'(x)=e^x-1 > 0$ ($x > 0$),

所以 $k(x)=h'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $h'(x) \geq h'(0) = 0$,

从而 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增, [12分]

所以 $[h(x)]_{\min} = h(0) = 2$, 此时 $M(0,1)$, $N(2,1)$.

所以 $|MN|$ 的最小值为 2, 此时 $a=1$. [13分]



扫描二维码，关注自主招生在线官方微信！

查看更多自主招生相关资讯！

