

2023 年沈阳市高三质量检测（三）

参考答案

1-5.ADABC

6-8.BAC

9.ABD 10.ACD 11.AD 12.BCD

13. $(-8,2) \cup (2,+\infty)$ 14. 7 或 $\frac{16}{7}$; $\frac{15}{8}$ (第一个空全对 2 分, 第二个空 3 分)

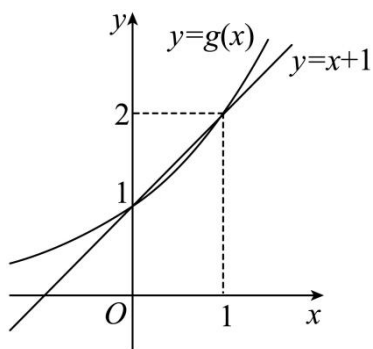
15. $\frac{8}{3}$

16. $(\frac{1}{e}, +\infty)$

部分选填空题详解:

6. B

根据题意可得, 在同一坐标系下分别画出函数 $y=x+1$ 和 $g(x)=2^x$ 的图象如下图所示:



由图可知, 当 $x=0$ 或 $x=1$ 时, 两图象相交,

若 $f(x)$ 的值域是 \mathbf{R} , 以实数 a 为分界点, 可进行如下分类讨论:

当 $a < 0$ 时, 显然两图象之间不连续, 即值域不为 \mathbf{R} ;

同理当 $a > 1$, 值域也不是 \mathbf{R} ;

当 $0 \leq a \leq 1$ 时, 两图象相接或者有重合的部分, 此时值域是 \mathbf{R} ;

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $0 \leq a \leq 1$.

故选: B

8. C

$$\because a - \frac{3}{4} = \log_5 3 - \frac{3}{4} = \frac{4\log_5 3 - 3}{4} = \frac{\log_5 81 - \log_5 125}{4} < 0, \therefore a < \frac{3}{4},$$

$$\because a - \frac{2}{3} = \log_5 3 - \frac{2}{3} = \frac{3\log_5 3 - 2}{3} = \frac{\log_5 27 - \log_5 25}{3} > 0, \therefore a > \frac{2}{3}, \text{ 则 } \frac{2}{3} < a < \frac{3}{4}.$$

$$\because b - \frac{3}{4} = \log_{13} 8 - \frac{3}{4} = \frac{4\log_{13} 8 - 3}{4} = \frac{\log_{13} 4096 - \log_{13} 2197}{4} > 0, \therefore b > \frac{3}{4},$$

$$\because e > \frac{9}{4}, \therefore \sqrt{e} > \frac{3}{2}, (\sqrt{e})^{-1} < \frac{2}{3}, \text{ 即 } e^{-\frac{1}{2}} < \frac{2}{3}, \text{ 则 } c < a < b.$$

故选: C.

11. AD

$$\text{因为 } f(x) = \frac{\sin x + \cos x - |\sin x - \cos x|}{2},$$

$$\text{所以当 } \sin x \geq \cos x, \text{ 即 } 2k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{4}, k \in \mathbf{Z} \text{ 时, } f(x) = \frac{\sin x + \cos x - \sin x + \cos x}{2} = \cos x,$$

当 $\sin x < \cos x$, 即 $2k\pi - \frac{3\pi}{4} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$ 时, $f(x) = \frac{\sin x + \cos x + \sin x - \cos x}{2} = \sin x$,

所以 $f(x) = \begin{cases} \cos x, \sin x \geq \cos x \\ \sin x, \sin x < \cos x \end{cases}$, A 正确;

因为函数 $y = \cos x$ 在 $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$, $k \in \mathbb{Z}$ 上单调递减,

函数 $y = \cos x$ 在 $[2k\pi - \pi, 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$ 上单调递增,

函数 $y = \sin x$ 在 $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, $k \in \mathbb{Z}$ 上单调递增,

函数 $y = \sin x$ 在 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$, $k \in \mathbb{Z}$ 上单调递减,

又当 $2k\pi - \frac{3\pi}{4} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$ 时, $f(x) = \sin x$,

当 $2k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$ 时, $f(x) = \cos x$,

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ ($k \in \mathbb{Z}$) 和 $\left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right]$ ($k \in \mathbb{Z}$), B 错误;

当 $2k\pi - \frac{3\pi}{4} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$ 时, $f(x) = \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$,

当 $2k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$ 时, $f(x) = \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$,

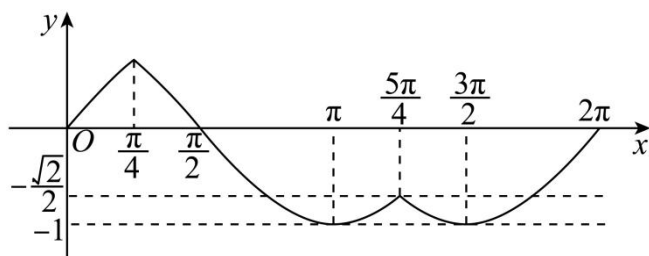
当且仅当 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$ 时取等号;

所以 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, C 错误;

因为方程 $f(x) = a$ 在 $[0, 2\pi)$ 上有四个实数解,

所以函数 $y = f(x)$ 的图象与函数 $y = a$ 的图象有四个交点,

作函数 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi)$ 上的图象如下,



观察可得 $-1 < a < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, D 正确;

故选: AD.

12. BCD

函数 $f(x) = x(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_7)$,

则 $f'(x) = (x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_7) + x[(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_7)]'$,

因为 $f'(0)=1$ ，所以 $a_1 a_2 \dots a_7 = 1$ ，

由等比数列的性质可得 $a_1 a_7 = a_2 a_6 = a_3 a_5 = a_4^2$ ，

所以 $a_1 a_2 \dots a_7 = a_4^7 = 1$ ，所以 $a_4 = 1$ ，

由 $a_1 > 1$ ，可得 $0 < q < 1$ ，故 B 正确；

因为等比数列 $\{a_n\}$ 首项 $a_1 > 1$ ，公比为 q ，所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ ，

则 $\lg a_{n+1} - \lg a_n = \lg \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lg q < 0$ ，故 $\{\lg a_n\}$ 为单调递减的等差数列，故 A 错误；设

$$b_n = S_n - \frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1}{q-1} q^n, \text{ 则 } \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\frac{a_1}{q-1} q^n}{\frac{a_1}{q-1} q^{n-1}} = q \text{ 为常数,}$$

因为 $0 < q < 1$ ，所以 $\frac{a_1}{q-1} < 0$ ， q^n 单调递减，

所以 $\{S_n - \frac{a_1}{1-q}\}$ 为单调递增的等比数列，故 C 正确；

因为 $a_1 a_2 \dots a_7 = 1$ ，且 $a_1 > a_2 > \dots > a_7 > 0$ ，所以 $a_1 a_2 \dots a_6 > 1$ ， $0 < a_7 < 1$ ，

所以使得 $T_n > 1$ 成立的 n 的最大值为 6，故 D 正确。

16. $(\frac{1}{e}, +\infty)$

解：对任意的 $x \in (1, +\infty)$ ，不等式 $k \cdot (e^{kx} + 1) - (\frac{1}{x} + 1) \ln x > 0$ 恒成立，

即 $kx(e^{kx} + 1) > (x + 1) \ln x$ ，显然 $k > 0$ ，

所以 $(e^{kx} + 1) \ln e^{kx} > (x + 1) \ln x$ ①，

令 $f(x) = (x + 1) \ln x$ ， $x \in (1, +\infty)$ ，

则 $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 + \ln x$ ， $x \in (1, +\infty)$ ，

设 $g(x) = f'(x) = \frac{1}{x} + 1 + \ln x$ ，所以 $g'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$ ，

当 $x > 1$ 时， $g'(x) > 0$ ，所以 $f'(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增，

所以 $f'(x) > f'(1) = 2$ ，所以 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增，

因为 ① 式可化为 $f(e^{kx}) > f(x)$ ，所以 $e^{kx} > x$ ，所以 $k > \frac{\ln x}{x}$ ，

令 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ ， $x \in (1, +\infty)$ ，

则 $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ，

当 $x \in (1, e)$ 时， $h'(x) > 0$ ，当 $x \in (e, +\infty)$ 时， $h'(x) < 0$ ，

所以 $h(x)$ 在 $(1, e)$ 单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 单调递减, 所以 $h(x)_{\max} = h(e) = \frac{1}{e}$, 所以 $k > \frac{1}{e}$, 故答案为: $(\frac{1}{e}, +\infty)$

17. (1) 因为 $a_{n+1} = a_n + 2^n$, 所以 $a_n - a_{n-1} = 2^{n-1} (n \geq 2)$,

所以 $a_n - a_1 = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1)$

$$= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^2 + 2 = \frac{2(1-2^{n-1})}{1-2} = 2^n - 2, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

又 $a_1 = 2$, 所以 $a_n = 2^n (n \geq 2)$, 4 分

又当 $n=1$ 时也适合上式,

所以 $a_n = 2^n (n \in \mathbf{N}^*)$ 5 分

(2) 因为 $b_n = \log_2 a_n = n$, 所以 $a_n \cdot b_n = n \cdot 2^n$, 6 分

$$T_n = 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \dots + n \cdot 2^n, \text{ ①}$$

$$2T_n = 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + 3 \times 2^4 + \dots + n \cdot 2^{n+1}, \text{ ②} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$-\text{②得} -T_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n - n \cdot 2^{n+1}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{所以} -T_n = \frac{2-2^{n+1}}{1-2} - n \cdot 2^{n+1}, \text{ 所以} T_n = 2^{n+1} - 2 - n \cdot 2^{n+1} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{故} T_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

18. (1) $f(x) = 2 \sin^2(\frac{\pi}{4} + x) - \sqrt{3} \cos 2x - 1 = -\cos(\frac{\pi}{2} + 2x) - \sqrt{3} \cos 2x = \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{3})$.
..... 2 分

由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$,
 可得 $k\pi - \frac{\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}$. 再由 $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, 可得 $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}]$, 5 分

故 $f(x)$ 的单调递增区间 $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}]$ 6 分

(2) 不等式 $|f(x) - m| < 2$, 即 $m - 2 < f(x) < m + 2$.

而 $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 时, $\frac{\pi}{6} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3}, \therefore \frac{1}{2} \leq \sin(2x - \frac{\pi}{3}) \leq 1, 1 \leq f(x) \leq 2$ 8 分

\therefore 不等式 $|f(x) - m| < 2$ 在 $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 上恒成立,

$\therefore m - 2 < 1$ 且 $m + 2 > 2$, 解得 $0 < m < 3$, 10 分

故实数 m 的取值范围为 $(0, 3)$ 12 分

19. 解: (1) $\because PC \perp AC, \therefore \angle PCA = 90^\circ$,

$\because AC = BC, PA = PB, PC = PC,$

$\therefore \triangle PCA \cong \triangle PCB \therefore \angle PCA = \angle PCB = 90^\circ$ ，即 $PC \perp BC$ ，

又 $AC \cap BC = C$ ， $AC, BC \subset$ 平面 ACB ，

$\therefore PC \perp$ 平面 ACB ，

$\therefore PC, CA, CB$ 两两垂直，

故以 C 点为坐标原点，分别以 CB, CA, CP 所在直线为 x 轴， y 轴， z 轴，建立空间直角坐标系，如图，

则 $C(0,0,0)$ ， $A(0,2,0)$ ， $D(1,0,0)$ ， $P(0,0,2)$ ，

$\overrightarrow{AD} = (1, -2, 0)$ ， $\overrightarrow{PD} = (1, 0, -2)$ ，

设平面 PAD 的一个法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = x - 2y = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PD} = x - 2z = 0 \end{cases}, \text{取 } x = 2, \text{得 } \vec{n} = (2, 1, 1),$$

易知平面 PDB 的一个法向量为 $\overrightarrow{CA} = (0, 2, 0)$ ，

$$\therefore \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{CA} \rangle = \frac{\sqrt{6}}{6},$$

设二面角 $A-PD-B$ 的平面角为 θ ，

$$\because \theta \text{ 是钝角}, \therefore \cos \theta = -\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

(2) 存在， M 是 AB 的中点或 A 是 MB 的中点.

设 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$ ，则 $M(2\lambda, 2-2\lambda, 0)$ ，

$$\therefore |\sin \langle \overrightarrow{PM}, \vec{n} \rangle| = \frac{|2\lambda|}{\sqrt{(2\lambda)^2 + (2-2\lambda)^2 + 4 \cdot \sqrt{6}}} = \frac{1}{6},$$

解得 $\lambda = \frac{1}{2}$ 或 $\lambda = -1$ ，

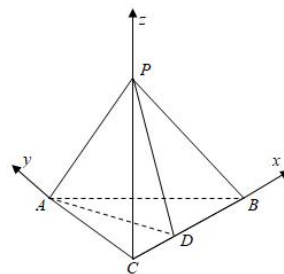
$\therefore M$ 是 AB 的中点或 A 是 MB 的中点.

20. 解：(1) X 的所有可能取值为：1, 2, 3, 4，

$$\text{则 } P(X=1) = \frac{1}{6},$$

$$P(X=2) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36},$$

$$P(X=3) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216},$$



.....1分

.....2分

.....4分

.....5分

.....6分

.....8分

.....9分

.....11分

.....12分

.....1分

$$P(X=4) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{216}; \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

所以 X 的分布列为

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{125}{216}$

..... 4 分

所以 X 的数学期望为

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{5}{36} + 3 \times \frac{25}{216} + 4 \times \frac{125}{216} = \frac{671}{216}. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(2) (法一) 设事件“甲掷第 n 次且不获胜”的概率为 a_n , 7 分

由题可知: $a_1 = \frac{5}{6}$, 且 $a_n = a_{n-1} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36} a_{n-1} (n \geq 2 \text{ 且 } n \in \mathbb{N}^*)$, 9 分

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 $\frac{5}{6}$ 为首项, $\frac{25}{36}$ 为公比的等比数列, 则 $a_n = \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{25}{36}\right)^{n-1}$, 10 分

所以甲恰好抛掷第 n 次且赢得比赛的概率

$$P_n = a_{n-1} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \left(\frac{25}{36}\right)^{n-1} \quad (n \geq 2 \text{ 且 } n \in \mathbb{N}^*) \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

当 $n=1$ 时符合, 所以 $P_n = \frac{1}{6} \left(\frac{25}{36}\right)^{n-1}$ 12 分

(法二) 甲抛了 n 次, 乙抛了 $n-1$ 次, 共抛了 $2n-1$ 次, 则甲抛 n 次获胜的概率为

$$P(A) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{2n-2} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. (1) 由题意得 $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ c = 2 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 2\sqrt{2} \\ b = 2 \end{cases}$, 所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 4 分

(2) 若切线的斜率不存在, 则圆的半径为 2, 此时另一条切线与椭圆无交点, 所以切线斜率存在.

设切线 $PM: y = k_1x + 2$, 联立 $\begin{cases} y = k_1x + 2 \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$, 即 $x^2 + 2(k_1x + 2)^2 - 8 = 0$,

即 $(1 + 2k_1^2)x^2 + 8k_1x = 0$, $x[(1 + 2k_1^2)x + 8k_1] = 0$, 解得 $x_1 = 0, x_2 = \frac{-8k_1}{1 + 2k_1^2}$, 5 分

当 $x = \frac{-8k_1}{1 + 2k_1^2}, y = \frac{-8k_1^2}{1 + 2k_1^2} + 2 = \frac{2 - 4k_1^2}{1 + 2k_1^2}$, 则 $M\left(\frac{-8k_1^2}{1 + 2k_1^2}, \frac{2 - 4k_1^2}{1 + 2k_1^2}\right)$, 6 分

同理设切线 $PN: y = k_2x + 2$, 则 $N\left(\frac{-8k_2^2}{1 + 2k_2^2}, \frac{2 - 4k_2^2}{1 + 2k_2^2}\right)$, 7 分

$$\begin{aligned} \text{则 } k_{MN} &= \frac{\frac{2-4k_2^2}{1+2k_2^2} - \frac{2-4k_1^2}{1+2k_1^2}}{\frac{-8k_2^2}{1+2k_2^2} + \frac{-8k_1^2}{1+2k_1^2}} = \frac{\frac{-8k_2^2}{1+2k_2^2} + \frac{-8k_1^2}{1+2k_1^2}}{\frac{-8k_2^2}{1+2k_2^2} + \frac{-8k_1^2}{1+2k_1^2}} = \frac{-8k_2^2(1+2k_1^2) + 8k_1^2(1+2k_2^2)}{-8k_2(1+2k_1^2) + 8k_1(1+2k_2^2)} \\ &= \frac{8(k_1^2 - k_2^2)}{16k_1k_2(k_2 - k_1) + 8(k_1 - k_2)} = \frac{(k_1 + k_2)(k_1 - k_2)}{2k_1k_2(k_2 - k_1) + (k_1 - k_2)} = \frac{k_1 + k_2}{1 - 2k_1k_2}, \end{aligned} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

则由 $MN \perp PM$ ，即 $k_{MN} \cdot k_1 = -1$ ，即 $\frac{k_1 + k_2}{1 - 2k_1k_2} \cdot k_1 = -1$ ，

即 $k_1^2 + k_1k_2 = 2k_1k_2 - 1$ ，即 $k_1k_2 - k_1^2 = 1$ (*)。.....10 分

设圆 $F_1: (x+2)^2 + y^2 = r^2$ ，过点 P 切线为 $y = kx + 2$ ，

即 $kx - y + 2 = 0$ ，则 $d = \frac{|-2k + 2|}{\sqrt{1+k^2}} = r$ ，即 $4k^2 + 4 - 8k = r^2 + r^2k^2$ ，

即 $(r^2 - 4)k^2 + 8k + r^2 - 4 = 0$ ，由 k_1, k_2 为方程的两根，则 $\begin{cases} r^2 - 4 \neq 0 \\ 64 - 4(r^2 - 4)^2 > 0 \\ k_1 + k_2 = \frac{-8}{r^2 - 4} \\ k_1k_2 = 1 \end{cases}$ ，

由 $k_1k_2 = 1$ ，从而 $k_1k_2 \neq \frac{1}{2}$ ，故直线 MN 斜率确实存在，代入(*)式，

则 $k_1 = 0$ ，矛盾，从而不存在。.....12 分

22. 【解答】解：(1) 将 $x = -\frac{1}{2}$ 代入切线方程 $(e-1)x + ey + \frac{e-1}{2} = 0$ 中，得 $y = 0$ ，

所以 $f(-\frac{1}{2}) = 0$ ，又 $f(-\frac{1}{2}) = (b - \frac{1}{2})(\frac{1}{e} - a) = 0$ ，解得 $b = \frac{1}{2}$ 或 $a = \frac{1}{e}$ ，.....1 分

又 $f'(x) = e^{2x}(2x + 2b + 1) - a$ ，所以 $f'(-\frac{1}{2}) = \frac{2b}{e} - a = -\frac{e-1}{e} = -1 + \frac{1}{e}$

若 $a = \frac{1}{e}$ ，则 $b = \frac{2-e}{2}$ (舍去);2 分

所以 $b = \frac{1}{2}$ ，则 $a = 1$;3 分

(2) 由 (1) 可知， $a = 1$ ， $b = \frac{1}{2}$ ，所以 $f(x) = (x + \frac{1}{2})(e^{2x} - 1)$ ，

令 $f(x) = 0$ ，有 $x = -\frac{1}{2}$ 或 $x = 0$ ，

故曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴负半轴的唯一交点 P 为 $(-\frac{1}{2}, 0)$ ，

曲线在点 $P(-\frac{1}{2}, 0)$ 处的切线方程为 $y = h(x)$ ，则 $h(x) = f'(-\frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$ ，

因为 $F(x) = f(x) - h(x)$ ，所以 $F(x) = f(x) - f'(-\frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$ ，

所以 $F'(x) = f'(x) - f'(-\frac{1}{2}) = 2e^{2x}(x+1) - \frac{1}{e}$ ， $F'(-\frac{1}{2}) = 0$ 4 分

若 $x \leq -1$, $F'(x) < 0$,5 分

若 $x \in (-1, -\frac{1}{2})$, $x+1 \in (0, \frac{1}{2})$, $e^{2x} \in (\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e})$, 所以 $2(x+1)e^{2x} \in (0, \frac{1}{e})$, $F'(x) < 0$,6 分

若 $x \in (-\frac{1}{2}, +\infty)$, $x+1 \in (\frac{1}{2}, +\infty)$, $e^{2x} \in (\frac{1}{e}, +\infty)$, $2(x+1)e^{2x} \in (\frac{1}{e}, +\infty)$, $F'(x) > 0$, 所以 $y = F'(x)$ 在 $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore F'(x) > F'(-\frac{1}{2}) = 0$, \therefore 函数 $y = F(x)$ 在 $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增.

所以 $F(x)_{\min} = F(-\frac{1}{2}) = 0$;7 分

(3) 证明: $h(x) = (\frac{1}{e} - 1)(x + \frac{1}{2})$, 设 $h(x) = m$ 的根为 x'_1 , 则 $x'_1 = -\frac{1}{2} + \frac{me}{1-e}$,8 分

又 $y = h(x)$ 单调递减, 由 (2) 知 $f(x) \geq h(x)$ 恒成立.

又 $m = h(x'_1) = f(x'_1) \geq h(x_1)$, 所以 $x'_1 \leq x_1$,9 分

设曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为 $y = t(x)$, 则 $t(x) = x$,

令 $T(x) = f(x) - t(x) = (x + \frac{1}{2})(e^{2x} - 1) - x$, $T'(x) = 2(x+1)e^{2x} - 2$,

当 $x \leq -1$ 时, $T'(x) = 2(x+1)e^{2x} - 2 \leq -2 < 0$, 当 $x > -1$ 时, $T''(x) = 2(2x+3)e^{2x} > 0$,

故函数 $y = T'(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 又 $T'(0) = 0$,

所以当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $T'(x) < 0$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $T'(x) > 0$,

所以函数 $y = T(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $T(x) \geq T(0) = 0$, 即 $f(x) \geq t(x)$,11 分

设 $t(x) = m$ 的根为 x'_2 , 则 $x'_2 = m$,

又函数 $y = t(x)$ 单调递增, 故 $m = t(x'_2) = f(x'_2) \geq t(x_2)$, 故 $x'_2 \geq x_2$.

又 $x'_1 \leq x_1$, 所以 $x_2 - x_1 \leq x'_2 - x'_1 = m - (-\frac{1}{2} + \frac{me}{1-e}) = \frac{1+2m}{2} - \frac{me}{1-e}$12 分

