广东 2021 届高三全真模拟考试

数　学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-3x-4\leqslant 0\}$，$B=\{x|4x-2m\geqslant 0\}$，若 $A\cup B=\{x|x\geqslant -1\}$，则实数 m 的取值范围为

A. $[-2,8]$　　B. $[-3,7]$　　C. $(-\infty,8]$　　D. $[-2,+\infty)$

2. 已知复数 z 满足 $3z=|8-6\mathrm{i}|-z\mathrm{i}$（i 为虚数单位），则 $z=$

A. i　　B. $1+\mathrm{i}$　　C. $3-\mathrm{i}$　　D. $3+\mathrm{i}$

3. 双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{4}=1(a>0)$ 的焦点、顶点到渐近线的距离之比为 2∶1，则双曲线 C 的焦距为

A. $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$　　B. $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$　　C. $2\sqrt{5}$　　D. $4\sqrt{2}$

4. 两旅客坐高铁外出旅游，希望座位连在一起，且有一个靠窗，已知高铁一等座的部分座位号码如图所示，则下列座位号码符合要求的是

窗口	1	2	过道	3	4	窗口
	5	6		7	8	
	9	10		11	12	
	…	…		…	…	

A. 74，75　　B. 52，53　　C. 45，46　　D. 38，39

5. 已知 $\tan\alpha=3$，则 $\dfrac{\cos(2\alpha+\pi)}{\sin^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)+1}=$

A. $-\dfrac{8}{11}$　　B. $\dfrac{8}{11}$　　C. $-\dfrac{8}{7}$　　D. $\dfrac{8}{7}$

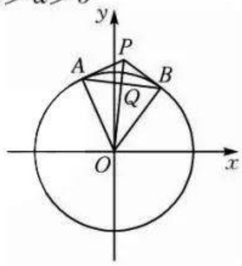
6. 某学校组织 6×100 接力跑比赛，某班级决定派出 A,B,C,D,E,F 等 6 位同学参加比赛. 在安排这 6 人的比赛顺序时要保证 A 要在 B 之前，D 和 F 的顺序不能相邻，则符合要求的安排共有

A. 240 种　　B. 180 种　　C. 120 种　　D. 150 种

7. 已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足①$f(x-6)=f(x)$；②$y=f(x+3)$ 为偶函数；③$x\in(0,3)$ 时 $f(x)$ 为减函数. 设 $a=f(2\ 021)$，$b=f(\sqrt{e})$，$c=f(\ln 2)$，则 a,b,c 的大小关系是

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $c>b>a$　　D. $c>a>b$

8. 如图，P 为圆 O：$x^2+y^2=4$ 外一动点，过点 P 作圆 O 的切线 PA，PB，切点分别为 A，B，$\angle APB=120°$，直线 OP 与 AB 相交于点 Q，点 $M(3,\sqrt{3})$，则 $|MQ|$ 的最小值为

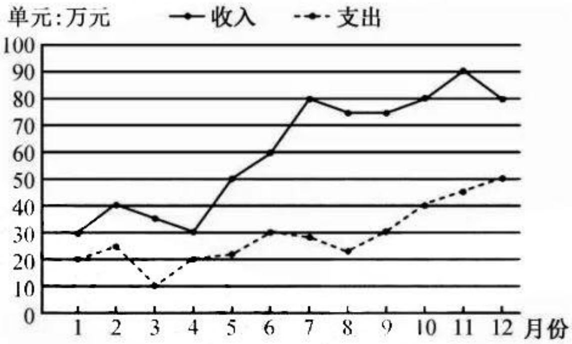


A. $\sqrt{3}$　　B. 2

C. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　　D. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 某企业 2019 年 12 个月的收入与支出数据的折线图如下：



已知：利润＝收入－支出，根据该折线图，下列说法正确的是

A. 该企业 2019 年 1 月至 6 月的总利润低于 2019 年 7 月至 12 月的总利润

B. 该企业 2019 年 1 月至 6 月的平均收入低于 2019 年 7 月至 12 月的平均收入

C. 该企业 2019 年 8 月至 12 月的支出持续增长

D. 该企业 2019 年 11 月份的月利润最大

10. 已知 $(1+x)^{10}=a_0+a_1(1-x)+a_2(1-x)^2+\cdots+a_{10}(1-x)^{10}$，则下列说法正确的有

A. $a_8=45$　　B. $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=2^{10}$

C. x^8 项的系数为 45　　D. $2a_1+2^2a_2+2^3a_3+\cdots+2^{10}a_{10}=-2^{10}$

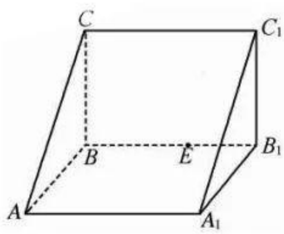
11. 如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=2$，$AB=BC=1$，$\angle ABC=90°$，点 E 是侧棱 BB_1 上的一个动点，则下列判断正确的是

A. 直三棱柱侧面积是 $4+2\sqrt{2}$

B. 直三棱柱外接球的体积为 $\sqrt{6}\pi$

C. 存在点 E，使得 $\angle A_1EA$ 为钝角

D. $AE+EA_1$ 的最小值为 $\sqrt{5}+1$



12. 已知过椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{4}=1(a>2)$ 左焦点 F_1 的直线 l 交椭圆于 P，Q 两点，F_2 为右焦点，若 $|PQ|=|PF_2|$，且 F_1 为 PQ 的四等分点，则椭圆的离心率可以为

A. $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$　　B. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　　C. $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$　　D. $\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=2$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 的值为________.

14. 若函数 $f(x)=x^2+\dfrac{a}{x}$ 的图象在点 $P(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=mx+m(m\in\mathbf{R})$，则实数 $a=$__________.

15. 已知 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，若方程 $f(x)=\dfrac{4}{5}$ 在 $(0,\pi)$ 内的解为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，则 $\sin(x_1-x_2)=$________.

16. 已知关于 x 的方程 $(\ln x-ax)\ln x+\dfrac{x^2}{4e^2}=0$ 在 $(1,+\infty)$ 上有四个不同的实数解，则实数 a 的取值范围是________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c，设 $\triangle ABC$ 的面积为 S，且 $S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2-c^2)$.

（1）求角 C 的大小；

（2）若 $a=4$，点 D 在边 AB 上，CD 为 $\angle ACB$ 的角平分线，$\triangle CDA$ 的面积为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，求边 AB 的值.

18.（本小题满分 12 分）

在① $S_n=\dfrac{3}{2}a_n-3$，其中 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和；② $a_1=1$，$a_n-a_{n+1}=a_na_{n+1}$ 这两个条件中任选一个，补充在下面问题中，并作答.

问题：已知数列 $\{a_n\}$ 满足________.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）是否存在正整数 m，使得 a_m+a_{m+1} 为数列 $\{a_n\}$ 中的项？若存在，求出 m；若不存在，说明理由.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

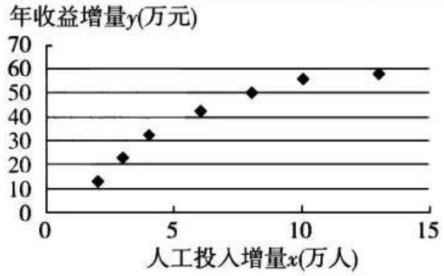
19.（本小题满分 12 分）

南澳县是广东唯一的海岛县，海区面积广阔，发展太平洋牡蛎养殖业具有得天独厚的优势，所产的“南澳牡蛎”是中国国家地理标志产品，产量高、肉质肥、营养好，素有“海洋牛奶精品”的美誉. 根据养殖规模与以往的养殖经验，产自某南澳牡蛎养殖基地的单个“南澳牡蛎”质量(g)在正常环境下服从正态分布 $N(32,16)$.

（1）购买 10 只该基地的“南澳牡蛎”，会买到质量小于 20 g 的牡蛎的可能性有多大？

（2）2021 年该基地考虑增加人工投入，现有以往的人工投入增量 x（万人）与年收益增量 y（万元）的数据如下：

人工投入增量 x(万人)	2	3	4	6	8	10	13
年收益增量 y(万元)	13	22	31	42	50	56	58

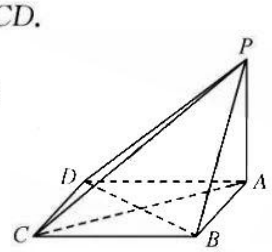


该基地为了预测人工投入增量为 16 人时的年收益增量，建立了 y 与 x 的两个回归模型：
模型①：由最小二乘公式可求得 y 与 x 的线性回归方程：$\hat{y}=4.1x+11.8$；
模型②：由散点图的样本点分布，可以认为样本点集中在曲线：$y=b\sqrt{x}+a$ 的附近，对人工投入增量 x 做变换，令 $t=\sqrt{x}$，则 $y=b\cdot t+a$，且有 $\bar{t}=2.5$，$\bar{y}=38.9$，$\sum\limits_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})=81.0$，$\sum\limits_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})^2=3.8$.
（ⅰ）根据所给的统计量，求模型②中 y 关于 x 的回归方程（精确到 0.1）；
（ⅱ）根据下列表格中的数据，比较两种模型的相关指数 R^2，并选择拟合精度更高、更可靠的模型，预测人工投入增量为 16 人时的年收益增量.

回归模型	模型①	模型②
回归方程	$\hat{y}=4.1x+11.8$	$y=b\sqrt{x}+a$
$\sum\limits_{i=1}^{7}(y_i-\hat{y}_i)^2$	182.4	79.2

附：若随机变量 $Z\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-3\sigma<Z<\mu+3\sigma)=0.9974$，$0.9987^{10}\approx0.9871$；
样本 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 的最小二乘估计公式为 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$，
另：刻画回归效果的相关指数 $R^2=1-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}$.

20.（本小题满分 12 分）
如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为菱形，且 $PA\perp$ 平面 $ABCD$.
（1）证明：平面 $PAC\perp$ 平面 PBD；
（2）若 $AB=2$，$\angle BAD=60°$，且平面 PAB 与平面 PCD 所成锐二面角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，求直线 PB 与平面 PCD 所成角的正弦值.



21.（本小题满分 12 分）
已知抛物线 $E:y^2=4x$ 的焦点为 F，若 $\triangle ABC$ 的三个顶点都在抛物线 E 上，且满足 $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\mathbf{0}$，则称该三角形为“核心三角形”.
（1）设“核心三角形 ABC”的一边 AB 所在直线的斜率为 2，求直线 AB 的方程；
（2）已知 $\triangle ABC$ 是“核心三角形”，证明：$\triangle ABC$ 三个顶点的横坐标都小于 2.

22.（本小题满分 12 分）
已知函数 $f(x)=\ln x-ax+1(a\in\mathbf{R})$.
（1）求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 上的最大值；
（2）证明：$\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)<\mathrm{e}$.

关于我们