2023届高三冲刺卷(五)　全国卷

文科数学参考答案及评分意见

1.D 【解析】$\because A=\{x|x^2-3x+2\leqslant 0\}=\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x|2x-1\leqslant 1\}=\{x|x\leqslant 1\}$，

$\therefore \complement_{\mathbf{R}}B=\{x|x>1\}$，$\therefore(\complement_{\mathbf{R}}B)\cap A=\{x|1<x\leqslant 2\}$.故选 D.

2.B 【解析】由题可得 $z=\dfrac{1+3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(1+3\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{4+2\mathrm{i}}{2}=2+\mathrm{i}$，故 $z+2\mathrm{i}=2+3\mathrm{i}$，其虚部为 3.故选 B.

3.C 【解析】所求几何体的侧面积为 $3\times4\times6=72\ \mathrm{cm}^2$，上下底面面积为 $\left(\dfrac{1}{2}\times3^2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times6-\pi\right)\times2=(27\sqrt{3}-2\pi)(\mathrm{cm}^2)$，

挖去圆柱的侧面积为 $2\pi\times4=8\pi(\mathrm{cm}^2)$，则所求几何体的表面积为 $(72+27\sqrt{3}+6\pi)\mathrm{cm}^2$.故选 C.

4.C 【解析】由已知得 $S_{17}-S_8=0$，即 $a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}+a_{16}+a_{17}=(a_9+a_{17})+(a_{10}+a_{16})+(a_{11}+a_{15})+(a_{12}+a_{14})+a_{13}=9a_{13}=0$，$\therefore a_{13}=0$，

又 $\because a_1>0$，$\therefore$ 当 S_n 取最大值时，$n=12$ 或 13.故选 C.

5.D 【解析】对于 A，若 $m=7$，则平均数为 $\dfrac{2+3+4+6+7}{5}=4.4$，故 A 正确；

对于 B，当 $m=4$ 时，众数为 4，故 B 正确；

对于 C，若 $m=6$，则这组数据从小到大排列为 2，3，4，6，6，所以中位数为 4，故 C 正确；

对于 D，计算平均数为 5，则方差 $s^2=\dfrac{1}{5}[(2-5)^2+(3-5)^2+(4-5)^2+(6-5)^2+(10-5)^2]=8$，故 D 错误.

故选 D.

6.B 【解析】$\sin\left(\dfrac{6\pi}{5}+\alpha\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{5}+\alpha\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore\sin\left(\dfrac{\pi}{5}+\alpha\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，又 $\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}-2\alpha\right)=\cos\left[\pi-\left(\dfrac{2\pi}{5}+2\alpha\right)\right]=-\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}+2\alpha\right)=-1+2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{5}+\alpha\right)=-\dfrac{1}{3}$.故选 B.

7.C 【解析】由题意知 $\begin{cases}a_2-a_1=2,\\a_3-a_2=3,\\\cdots,\\a_n-a_{n-1}=n,\end{cases}$ $n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*$ 且 $a_1=1$，则由累加法可知 $a_n-a_1=2+3+\cdots+n$，

所以 $a_n=1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，$\therefore\dfrac{n(n+1)}{2}>2n+2$，得 $n>4$，即 $n_{\min}=5$.故选 C.

8.C 【解析】集合 $M=\{1,2,3,4,5,6\}$ 的三元子集有 $\{1,2,3\}$，$\{1,2,4\}$，$\{1,2,5\}$，$\{1,2,6\}$，$\{1,3,4\}$，$\{1,3,5\}$，$\{1,3,6\}$，$\{1,4,5\}$，$\{1,4,6\}$，$\{1,5,6\}$，$\{2,3,4\}$，$\{2,3,5\}$，$\{2,3,6\}$，$\{2,4,5\}$，$\{2,4,6\}$，$\{2,5,6\}$，$\{3,4,5\}$，$\{3,4,6\}$，$\{3,5,6\}$，$\{4,5,6\}$，共 20 个.

满足集合中的元素都是孤立元素的集合 N 可能为 $\{1,3,5\}$，$\{1,3,6\}$，$\{1,4,6\}$，$\{2,4,6\}$，一共 4 种.由古典概率模型公式，可得集合 N 中的元素都是孤立元素的概率 $P=\dfrac{4}{20}=\dfrac{1}{5}$.故选 C.

9.C 【解析】解法一：抛物线的准线方程为 $y=-1$，焦点为 $F(0,1)$，

设点 P 的坐标为 (m,n)，则点 Q 的坐标为 $(m,-1)$，$|PQ|=n+1$，

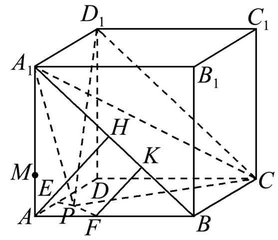
由抛物线的定义知 $|PF|=|PQ|=n+1$，因为 $|PF|=|QF|=\sqrt{m^2+4}$，所以 $\triangle PCF$ 为等边三角形，所以 $n+1=\sqrt{m^2+4}$，又 $n=\dfrac{1}{4}m^2$，所以 $m=\pm2\sqrt{3}$，$n=3$，所以点 P 的坐标为 $(\pm2\sqrt{3},3)$，

所以 $|PF|=4$，所以 $S_{\triangle PFQ}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times4^2=4\sqrt{3}$.故选 C.

解法二：由抛物线定义 $|PF|=|PQ|$，又 $|PF|=|QF|$，故 $\triangle PFQ$ 为正三角形，抛物线的准线方程为 $y=-1$，焦点为 $F(0,1)$，故 $\triangle PFQ$ 边长为 4，故 $S_{\triangle PFQ}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times4^2=4\sqrt{3}$.故选 C.

10.C 【解析】设 $f(x)$ 的最小正周期为 T，根据 $f(x_0)=-f\left(x_0+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 及函数图象的对称性知，$\dfrac{T}{2}=\left(x_0+\dfrac{\pi}{3}\right)-x_0$，所以 $T=\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{\omega}$，得 $\omega=3$.由 $f(0)=1$，得 $\sin(3\times0+\varphi)=\dfrac{1}{2}$，因为 $0<\varphi<\pi$，由图知 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，故 $f(x)=2\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.故选 C.

11.C 【解析】如图所示：



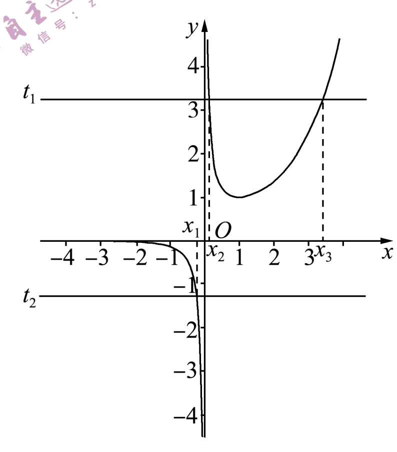
对于 A，当 $MA=AP=1$ 时，MP 与底面 $ABCD$ 所成的角 $\theta=\frac{\pi}{4}$，又点 P 所在区域为以 A 为圆心，1 为半径的圆在正方形 $ABCD$ 内部部分(包含边界弧长)，所以 $\angle AMP\leqslant\frac{\pi}{4}$，故 A 正确；

对于 B，当点 P 位于 AE 上时，此时点 P 到平面 A_1CD_1 的距离最大，最大距离 $AH=\frac{3\times4}{5}=\frac{12}{5}$，当 P 与点 F 重合时，此时点 P 到平面 A_1CD_1 的距离最小，最小距离为 FK，因为 $\triangle BFK\backsim\triangle BAH$，所以 $FK=\frac{3}{4}AH$，所以 $FK=\frac{9}{5}$，故点 P 到平面 A_1CD_1 的距离取值范围为 $\left[\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right]$，故 B 正确；

对于 C，不妨设点 P 与点 F 重合，此时 $PC_1=FC_1=\sqrt{FB^2+BC^2+C_1C^2}=\sqrt{34}$，$MF=\sqrt{MA^2+AF^2}=\sqrt{2}$，$MC_1=\sqrt{MA_1^2+A_1D_1^2+D_1C_1^2}=6$，由余弦定理得 $\cos\angle MFC_1=\frac{MF^2+FC_1^2-C_1M^2}{2MF\cdot FC_1}=\frac{2+34-36}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{34}}=0$，则 $\angle MFC_1=\frac{\pi}{2}$，故存在点 P 使得 $MP\perp PC_1$，故 C 错误；

对于 D，当 $BP=3$ 时，四面体 $P-B_1C_1B$ 的外接球半径为 $r=\frac{\sqrt{3^2+4^2+3^2}}{2}=\frac{\sqrt{34}}{2}$，所以外接球体积为 $\frac{17\sqrt{34}\pi}{3}$，故 D 正确.故选 C.

12.A 【解析】$f(x)=\frac{e^{x-1}}{x}+\frac{x}{e^{x-1}+x}+a=\frac{e^{x-1}}{x}+\frac{1}{\frac{e^{x-1}}{x}+1}+a$，令 $t=\frac{e^{x-1}}{x}$，则 $t'=\left(\frac{e^{x-1}}{x}\right)'=\frac{(x-1)e^{x-1}}{x^2}$，$\therefore t=\frac{e^{x-1}}{x}$ 在 $(-\infty,0)$，$(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则 $t=\frac{e^{x-1}}{x}\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$，所以 $f(x)=0$ 有 3 个不同的解等价于 $t+\frac{1}{t+1}+a=0$ 有两个解 t_1,t_2 且 $t_1>1,t_2<0$，整理可得 $t^2+(a+1)t+(a+1)=0$，$\therefore$ 根据根的分布，得 $\begin{cases}a+1<0,\\1+a+1+a+1<0,\end{cases}$ 解得 $a<-\frac{3}{2}$，则 a 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$.故选 A.



13.$\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5}{6}\pi$ 【解析】$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=1\times1\times\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{1}{2}\Rightarrow\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$，$\because\boldsymbol{c}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，利用三角形法则可知 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 夹角为 $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5}{6}\pi$.

14.$\frac{4\sqrt{15}}{5}$ 【解析】圆 $C:(x-3)^2+y^2=4$，$r=2$，圆心 $(3,0)$ 到直线 $y=\frac{1}{3}(x+1)$ 的距离 $d=\frac{4}{\sqrt{10}}$，利用勾股定理，$\frac{1}{2}|MN|=\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{4-\frac{16}{10}}$，解得 $|MN|=\frac{4\sqrt{15}}{5}$.

15.$3+2\sqrt{3}$ 【解析】解法一:因为 $x+2y=1$,

所以 $\frac{x^2+x+1}{2xy}=\frac{x}{2y}+\frac{x+1}{2xy}=\frac{x}{2y}+\frac{x+y}{xy}=\frac{x}{2y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{x}{2y}+\frac{x+2y}{y}+\frac{x+2y}{x}=3+\frac{3x}{2y}+\frac{2y}{x}\geqslant 3+2\sqrt{3}$,

当且仅当 $\begin{cases}\frac{3x}{2y}=\frac{2y}{x},\\ x+2y=1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}-1}{2},\\ y=\frac{3-\sqrt{3}}{4},\end{cases}$ 时等号成立,所以 $\frac{x^2+x+1}{2xy}$ 的最小值为 $3+2\sqrt{3}$.

解法二:令 $\frac{x^2+x+1}{2xy}=\frac{x^2+x+1}{x(1-x)}=t(t>0)$,整理得 $(t+1)x^2+(1-t)x+1=0$.因为方程有解,所以 $\Delta=(1-t)^2-4(t+1)=t^2-6t-3\geqslant 0$,解得 $t\leqslant 3-2\sqrt{3}$ 或 $t\geqslant 3+2\sqrt{3}$,因为 $t>0$,故最小值为 $3+2\sqrt{3}$.

16.$\left(-\infty,\frac{\mathrm{e}}{2}\right]$ 【解析】由题意得 $x_1>0,x_2>0$,所以 $(x_1-x_2)\left[\frac{f(x_1)}{x_2}-\frac{f(x_2)}{x_1}\right]<0$ 化为 $(x_1-x_2)[x_1f(x_1)-x_2f(x_2)]<0$,所以函数 $g(x)=xf(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数,所以当 $x>0$ 时,$g'(x)=2ax-\mathrm{e}^x\leqslant 0$ 恒成立,得 $a\leqslant\frac{\mathrm{e}^x}{2x}$ 恒成立,令 $h(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{2x}$,则只需 $a\leqslant[h(x)]_{\min}$.由 $h'(x)=\frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{2x^2}$ 知,当 $x>1$ 时,$h'(x)>0$,$h(x)$ 递增;当 $0<x<1$ 时,$h'(x)<0$,$h(x)$ 递减;所以 $h(x)$ 在 $x=1$ 处有极小值,也是最小值,且 $[h(x)]_{\min}=h(1)=\frac{\mathrm{e}}{2}$,所以 $a\leqslant\frac{\mathrm{e}}{2}$,经检验,$a=\frac{\mathrm{e}}{2}$ 符合题意,故实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{\mathrm{e}}{2}\right]$.

17.**解**:(1)$\cos B=\frac{c^2+a^2-4}{2ac}=\frac{1}{2}$, ········· 2 分

由 $0<B<\pi$,得 $B=\frac{\pi}{3}$. ········· 4 分

(2)由(1)知 $B=\frac{\pi}{3}$,得 $A+C=\frac{2\pi}{3}$,故 $A=\frac{2\pi}{3}-C$, ········· 6 分

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,得

$\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)}{\sin C}=\frac{\sin\frac{2\pi}{3}\cos C-\cos\frac{2\pi}{3}\sin C}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{2\tan C}+\frac{1}{2}$, ········· 9 分

由△ABC 为锐角三角形得 $\begin{cases}0<C<\frac{\pi}{2},\\ 0<\frac{2\pi}{3}-C<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 解得 $\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{2}$,∴$\tan C\in\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$,∴$\frac{a}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2\tan C}+\frac{1}{2}\in\left(\frac{1}{2},2\right)$. ········· 12 分

18.(1)**证明**:如图,取 AB 中点 H,连接 FH,GH.

∵F,H 分别是 PB,AB 的中点,∴$FH\parallel PA$.

∵$PA\subseteq$平面 PAD,$FH\not\subset$平面 PAD,∴$FH\parallel$平面 PAD. ········· 2 分

∵G,H 分别是 CD,AB 的中点,∴$GH\parallel DA$,

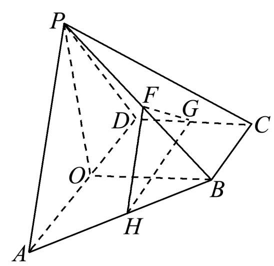
∵$DA\subseteq$平面 PAD,$GH\not\subset$平面 PAD,∴$GH\parallel$平面 PAD. ········· 4 分

又∵FH,$GH\subseteq$平面 FGH,$FH\cap GH=H$,

∴平面 $FGH\parallel$平面 PAD,

∵$FG\subseteq$平面 FGH,

∴$FG\parallel$平面 PAD. ········· 5 分



(2)**解**:如图,取 AD 中点 O,连接 PO,BO.

∵$AD=2BC=2$,$BC\parallel AD$,$CD\perp AD$,$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$,

∴$OA=OD=1$,$OB=DC=\sqrt{3}$,$OB\perp AD$,$AB=2$.

∵$PA=PD=AD=2$,∴$PO\perp AD$,$PO=\sqrt{3}$,

∴$AD\perp$平面 POB,∵$AD\subset$平面 $ABCD$,∴平面 $ABCD\perp$平面 POB.

∵$PB=\sqrt{6}$,∴$PO^2+BO^2=PB^2$,∴$PO\perp OB$.

又∵平面 $ABCD\cap$ 平面 $POB=OB$，∴$PO\perp$ 平面 $ABCD$，…… 7 分

$S_{\triangle GAB}=S_{四边形ABCD}-S_{\triangle GBC}-S_{\triangle ADG}=\frac{1}{2}\times(1+2)\times\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，

$V_{P-GAB}=\frac{1}{3}S_{\triangle GAB}\cdot PO=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{4}\times\sqrt{3}=\frac{3}{4}$， …… 9 分

$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{2^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$， …… 10 分

设点 G 到平面 PAB 的距离为 d，

$V_{G-PAB}=\frac{1}{3}S_{\triangle PAB}\cdot d=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{15}}{2}d=\frac{3}{4}$，∴$d=\frac{3\sqrt{15}}{10}$. …… 12 分

19.**解**：(1)由题意，得 $\bar{x}=\frac{1}{5}\times(1+2+4+8+10)=5$，$\bar{y}=\frac{1}{5}\times(12+10+7+6+5)=8$， …… 2 分

$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\cdot\bar{y}=158-200=-42$，$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=60$，

$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=-0.7$. …… 4 分

$\hat{a}=8+0.7\times5=11.5$，

所以所求回归方程是 $\hat{y}=-0.7x+11.5$. …… 6 分

(2) 列出残差表：

$y_i-\hat{y}_i$	1.2	−0.1	−1.7	0.1	0.5
$y_i-\bar{y}$	4	2	−1	−2	−3

…… 9 分

所以 $\sum_{i=1}^{5}(y_i-\hat{y}_i)^2=4.6$，$\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2=34$，$R^2\approx0.865$，∴$0.8<R^2<0.9$

所以回归模型的拟合效果良好. …… 12 分

20.**解**：(1)根据题意得 $\begin{cases}\frac{2a}{b}=2\sqrt{2},\\ \frac{4}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1,\end{cases}$ …… 2 分

解得 $\begin{cases}b=2,\\ a=2\sqrt{2},\end{cases}$ 所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. …… 4 分

(2)由题意得，$D(-4,0)$，

将直线 l 的方程 $x=my-4(m\neq0)$ 代入椭圆 C 的方程，整理得：$(m^2+2)y^2-8my+8=0$，

$\Delta=(8m)^2-4(m^2+2)\cdot8=32m^2-64$，

由 $\Delta>0$ 得 $m^2>2$，$|m|>\sqrt{2}$，

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，由韦达定理可得 $\begin{cases}y_1+y_2=\frac{8m}{m^2+2},\\ y_1y_2=\frac{8}{m^2+2},\end{cases}$ …… 6 分

设 $\frac{|DP|}{|DQ|}=\frac{|PM|}{|MQ|}=\lambda$，∴$\lambda=\frac{y_1}{y_2}$，$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{MQ}$，即 $(x_M-x_1,y_M-y_1)=\lambda(x_2-x_M,y_2-y_M)$，

∴$y_M=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{2y_1y_2}{y_1+y_2}$， …… 9 分

所以△ODM 的面积 $S=\frac{1}{2}\times|OD|\cdot|y_M|=2|y_M|=\frac{4y_1y_2}{|y_1+y_2|}=\frac{4}{|m|}$. …… 11 分

∵$|m|>\sqrt{2}$，

$\therefore \triangle ODM$ 的面积 $S=\dfrac{4}{|m|}\in(0,2\sqrt{2})$. …………………………………………………………………………… 12 分

21.**解**:(1) $f'(x)=2a-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{2ax^2-2x+1}{x^2}$,令 $h(x)=2ax^2-2x+1$,

当 $a=0$ 时,$f'(x)=\dfrac{-2x+1}{x^2}$,$f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$上单调递增,在$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$上单调递减.所以 $f(x)$有一个极大值; ………… 1 分

当 $a\neq 0$ 时,①$a<0$,$h(x)$为图象开口朝下的二次函数,$\Delta=4-8a>0$,

$\therefore h(x)=0$ 的两根为 $x=\dfrac{2\pm\sqrt{4-8a}}{4a}=\dfrac{1\pm\sqrt{1-2a}}{2a}$,显然$\dfrac{1+\sqrt{1-2a}}{2a}<0$,$\dfrac{1-\sqrt{1-2a}}{2a}>0$,

$\therefore f(x)$在$\left(0,\dfrac{1-\sqrt{1-2a}}{2a}\right)$上单调递增,在$\left(\dfrac{1-\sqrt{1-2a}}{2a},+\infty\right)$上单调递减,所以 $f(x)$有一个极大值; ………………… 2 分

②$0<a<\dfrac{1}{2}$,可知$\dfrac{1-\sqrt{1-2a}}{2a}>0$,$\therefore f(x)$在$\left(0,\dfrac{1-\sqrt{1-2a}}{2a}\right)$,$\left(\dfrac{1+\sqrt{1-2a}}{2a},+\infty\right)$上单调递增,

在$\left(\dfrac{1-\sqrt{1-2a}}{2a},\dfrac{1+\sqrt{1-2a}}{2a}\right)$上单调递减.所以 $f(x)$有 2 个极值,一个极大值,一个极小值; ………………………… 3 分

③$a\geqslant\dfrac{1}{2}$时,可得 $f'(x)\geqslant 0$,$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,所以 $f(x)$无极值.

综上所述,当 $a\leqslant 0$ 时,$f(x)$有一个极大值;

当 $0<a<\dfrac{1}{2}$时,$f(x)$有一个极大值,一个极小值;

当 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$时,$f(x)$无极值. ……………………………………………………………………… 4 分

(2)设 $F(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}$,$(x>1)$,$F'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$,

$\therefore F(x)>F(1)=0$,$\therefore \ln x>\dfrac{2(x-1)}{x+1}$,两边同时取倒数$\dfrac{1}{\ln x}<\dfrac{x+1}{2(x-1)}$,

$\therefore \dfrac{x+1}{2(x-1)}-\dfrac{1}{\ln x}>0$,$\therefore g(x)>0$, …………………………………………………………… 8 分

又$\because f(x)\cdot g(x)>0$,$\therefore f(x)>0$ 即可,

由 $f(x)>0$,可得 $a>\dfrac{2\ln x+\frac{1}{x}}{2x}$,设 $G(x)=\dfrac{2\ln x+\frac{1}{x}}{x}(x>1)$,$G'(x)=\dfrac{2\left(1-\frac{1}{x}-\ln x\right)}{x^2}$,

$\therefore$设 $r(x)=1-\dfrac{1}{x}-\ln x$,$r'(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1-x}{x^2}\leqslant 0$, ………………………………………………… 10 分

$\therefore r(x)\leqslant r(1)=0$,$\therefore G'(x)\leqslant 0$,$\therefore G(x)$单调递减,$\therefore G(x)<G(1)=1$,$\therefore a\geqslant\dfrac{1}{2}$,

$\therefore a$ 的取值范围为$\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$. …………………………………………………………………… 12 分

22.**解**:(1)根据题意,消去参数 t,可得

直线 l 的普通方程为:$2x-y+a-3=0$. ……………………………………………………… 2 分

因为曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=8\cos\theta-4\sin\theta$,

变形可得:$\rho^2=8\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta$, …………………………………………………………… 3 分

$\because \rho^2=x^2+y^2$,$\rho\cos\theta=x$,$\rho\sin\theta=y$,$\therefore x^2+y^2=8x-4y$,

故曲线 C 的直角坐标方程为:$(x-4)^2+(y+2)^2=20$. ………………………………………… 5 分

(2)由(1)可知曲线 C 的圆心 $C(4,-2)$,$r=2\sqrt{5}$,若曲线 C 上有且仅有三个点到直线 l 的距离为$\sqrt{5}$,

则圆心 C 到直线 l 的距离为 $d=r-\sqrt{5}=2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$, ………………………………… 7 分

∵直线 l 为 $2x-y+a-3=0$，∴$d=\frac{|2\times4+2+a-3|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，…………………………………………………… 9 分

∴$|a+7|=5$，∴$a=-2$ 或 $a=-12$. …………………………………………………… 10 分

23.**解**：(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=3|x-1|+\sqrt{(3x-1)^2}=3|x-1|+|3x-1|$，

$$f(x)=\begin{cases}-6x+4, x\leqslant\frac{1}{3},\\ 2,\frac{1}{3}<x<1,\\ 6x-4, x\geqslant1,\end{cases}$$ …………………………………………………… 2 分

当 $x\leqslant\frac{1}{3}$ 时，$-6x+4\leqslant8$，即 $-\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$，

当 $\frac{1}{3}<x<1$ 时，$2\leqslant8$ 恒成立，即 $\frac{1}{3}<x<1$，

当 $x\geqslant1$ 时，$6x-4\leqslant8$，即 $1\leqslant x\leqslant2$，

综上，不等式的解集为 $\left\{x\middle|-\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant2\right\}$. …………………………………………………… 5 分

(2)$f(x)=3|x-1|+\sqrt{(3x-a)^2}=|3x-3|+|3x-a|\geqslant|(3x-3)-(3x-a)|=|a-3|$，

若 $f(x)$ 的最小值为 0，则 $|a-3|=0$，解得 $a=3$，…………………………………………………… 7 分

∴$x^2+2y^2+3z^2=3$，

∴$xz+2yz\leqslant\frac{x^2+z^2}{2}+y^2+z^2=\frac{x^2+2y^2+3z^2}{2}=\frac{3}{2}$，…………………………………………………… 9 分

当且仅当 $x=y=z=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立，

故 $xz+2yz$ 的最大值为 $\frac{3}{2}$. …………………………………………………… 10 分