2023 年岳阳县新高考适应性测试数学参考答案

一、二、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	C	A	D	B	D	D	ABC	BCD	ACD	AC

6、【答案】B

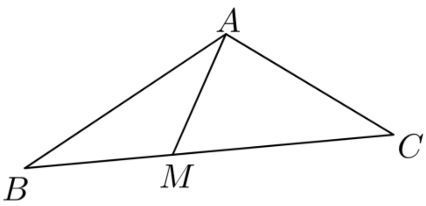
【详解】$S_{2021}=\dfrac{2021\left(a_1+a_{2021}\right)}{2}=2021a_{1011}>0$，所以 $a_{1011}>0$，$S_{2022}=\dfrac{2022\left(a_1+a_{2022}\right)}{2}=1011\left(a_{1011}+a_{1012}\right)<0$，

所以 $a_{1011}+a_{1012}<0$，所以 $a_{1012}<0$ 且 $\left|a_{1012}\right|>\left|a_{1011}\right|$，所以数列是递减数列，且当 $n=1011$ 时，S_n 取得最大值.

故 B 正确，AC 错误.

因为 $S_{1012}-S_{1009}=a_{1010}+a_{1011}+a_{1012}=3a_{1011}>0$，所以 $S_{1012}>S_{1009}$，故 D 错误.故选：B.

7【详解】



$a\sin(B+\pi)+b\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}-A\right)=0,\therefore -\sin A\sin B+\sin B\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\dfrac{1}{2}\sin A\right)=0$

化简得：$\sin A+\sqrt{3}\cos A=0,\therefore \tan A=-\sqrt{3}, A\in(0,\pi),\therefore A=\dfrac{2\pi}{3}$,

又 $\overrightarrow{BM}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{BC},\therefore BM=6, MC=9$，$\angle MAB=\angle MBA$，$\therefore \angle MAC=\dfrac{2\pi}{3}-B, C=\dfrac{\pi}{3}-B$,

在 $\triangle MAC$ 中，$\dfrac{MC}{\sin\angle MAC}=\dfrac{MA}{\sin\angle MCA},\therefore \dfrac{9}{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-B\right)}=\dfrac{6}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-B\right)}$,

解之：$\tan B=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$，$\therefore \sin\angle AMC=\sin 2B=\dfrac{2\tan B}{1+\tan^2 B}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$

$\therefore h=6\times\dfrac{5\sqrt{3}}{14}=\dfrac{15\sqrt{3}}{7}$，　$\therefore S=\dfrac{1}{2}\times 9\times\dfrac{15\sqrt{3}}{7}=\dfrac{135\sqrt{3}}{14}$.

8. 解析：D　设内层椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，∵内外椭圆离心率相同，∴外层椭圆可设成 $\dfrac{x^2}{(ma)^2}+\dfrac{y^2}{(mb)^2}=1(m>1)$，设切线 AC 的方程为 $y=k_1(x+ma)$，与 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 联立得：$(b^2+a^2k_1^2)x^2+2ma^3k_1^2x+m^2a^4k_1^2-a^2b^2=0$，由 $\Delta=0$，则 $k_1^2=\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{1}{m^2-1}$，设切线 BD 的斜率为 k_2，同理可得 $k_2^2=\dfrac{b^2}{a^2}\cdot(m^2-1)$，$\therefore k_1^2\cdot k_2^2=\dfrac{b^4}{a^4}=\left(-\dfrac{5}{8}\right)^2$，则 $\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{5}{8}$，因此，$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\dfrac{5}{8}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.故选 D.

9.【答案】ABC

【详解】对于 A，因为$2\sqrt{4ab}\le a+4b=2$，所以$ab\le\frac{1}{4}$，当且仅当$a=4b=1$，即$a=1,b=\frac{1}{4}$时，取到等号，故 A 正确；

对于 B，$2^a+16^b\ge2\sqrt{2^a\cdot16^b}=2\sqrt{2^{a+4b}}=4$，当且仅当$a=4b=1$，即$a=1,b=\frac{1}{4}$时，取到等号，故 B 正确；

对于 C，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}(a+4b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{2}\left(5+\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}\right)\ge\frac{1}{2}\left(5+2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{4b}{a}}\right)=\frac{9}{2}$，当且仅当$a=2b$，即$a=\frac{2}{3},b=\frac{1}{3}$时，取到等号，故 C 正确；

10.【答案】BCD

【详解】$f(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1$

$=2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\right]+1=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$.

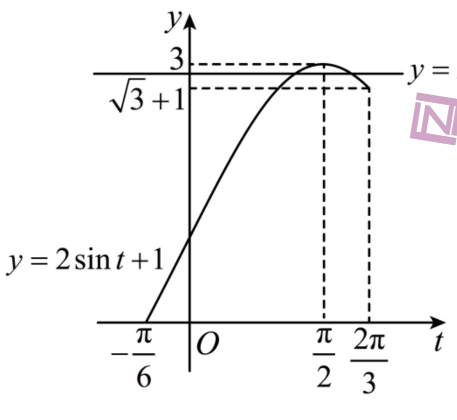
对于 A：函数$f(x)$的最大值是3，A 选项错误；

对于 B：$x\in\left(-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right)$时，$2x-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$是正弦函数的递增区间，故 B 选项正确；

对于 C：函数$y=2\sin2x+1$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位得到函数$y=2\sin2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$的图象，即函数$f(x)$的图象，C 选项正确；

对于 D：当$\frac{\pi}{12}\le x\le\frac{\pi}{2}$时，$-\frac{\pi}{6}\le2x-\frac{\pi}{3}\le\frac{2\pi}{3}$，令$t=2x-\frac{\pi}{3}$，则$-\frac{\pi}{6}\le t\le\frac{2\pi}{3}$，

由题意可知，直线$y=m$与函数$y=2\sin t+1$在$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$上的图象有两个交点，如下图所示：



当$t=\frac{2\pi}{3}$时，$y=2\sin\frac{2\pi}{3}+1=\sqrt{3}+1$，

由图可知，当$\sqrt{3}+1\le m<3$时，直线$y=m$与函数$y=2\sin t+1$在$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$上的图象有两个交点，

因此，实数m的取值范围是$\left[\sqrt{3}+1,3\right)$，D 对.

故选：BCD.

11、【详解】对于 A，因为平面 AA_1D_1D // 平面 BB_1C_1C，根据面面平行的性质，平面 α 与这两个平面的交线互相平行，即 D_1F // BE，

因为 $D_1F \not\subset$ 面 ABE， $BE \subset$ 面 ABE，所以 D_1F //平面 ABE，

又点 P 在线段 D_1F 上,所以三棱锥 $P-ABE$ 的体积为定值，故 A 正确；

对于 B，若存在点 P，使得 $DP \perp \alpha$，因为 $BF \subset \alpha$，则 $DP \perp BF$，

因为 $DD_1 \perp BF, DD_1 \cap DP = D$， $DD_1, DP \subset$ 平面 AA_1D_1D,所以 $BF \perp$ 平面 AA_1D_1D，与题意矛盾，故 B 错误；

对于 C，如图 1 所示，取 BC 的中点 Q，连接 C_1Q，

则点 P 在平面 BCC_1B_1 内的射影 P' 在 C_1Q 上，直线 PE 与平面 BCC_1B_1 所成角即 $\angle PEP'$，且有 $\tan\angle PEP' = \dfrac{PP'}{EP'}$

由已知可得 $PP' = 2$， EP' 最小为 $\sqrt{2}$，所以 $\tan\angle PEP'$ 的最大值为 $\sqrt{2}$，故 C 正确.

对于 D，如图 2，取 A_1D_1 的中点 G，连接 AG，分别取 BE，AG 的中点 O_1, O_2，

连接 O_1, O_2，因为 $\triangle BB_1E$ 是等腰直角三角形，

所以三棱锥 $P-BB_1E$ 外接球的球心 O 在直线 O_1O_2 上，

设三棱锥 $P-BB_1E$ 外接球的半径为 R，则 $OB = OP = R$，

所以 $|OO_1|^2 + |O_1B|^2 = |OO_2|^2 + |O_2P|^2$，

设 $|OO_1| = d$，则 $d^2 + 2 = (2-d)^2 + |O_2P|^2$，

所以 $d = \dfrac{1}{2} + \dfrac{|O_2P|^2}{4}$，

当点 P 与 F 重合时， $|O_2P|$ 取最小值 $\sqrt{2}$，此时 $d = 1, R^2 = 3$，

三棱锥 $P-BB_1E$ 外接球的表面积为 $4\pi R^2 = 12\pi$，

当点 P 与 D_1 重合时， $|O_2P|$ 取最大值 $\sqrt{10}$，

此时 $d = 3, R^2 = 11$，三棱锥 $P-BB_1E$ 外接球的表面积为 $4\pi R^2 = 44\pi$，故 D 正确.

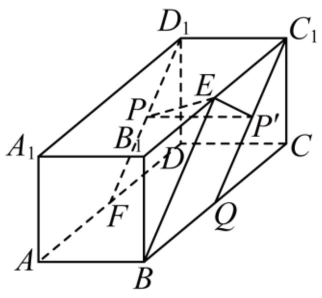


图1

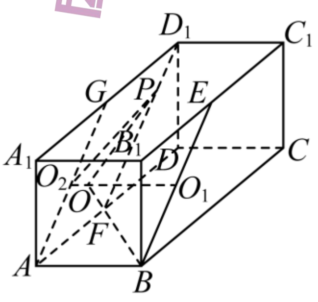


图2

故选：ACD

12、【答案】AC

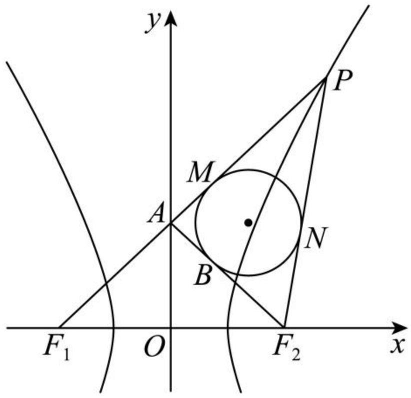
【详解】由题可得 $F_1(-2,0), F_2(2,0)$，

因为$\triangle PAF_2$的内切圆与边AF_2相切于点B，设$\triangle PAF_2$的内切圆与PF_1,PF_2分别切于M,N，如图，

由切线长定理可知$|PM|=|PN|$，$|F_2B|=|F_2N|,|AM|=|AB|,|AF_1|=|AF_2|$，

所以$|PF_1|-|PF_2|=|PM|+|AM|+|AF_1|-(|PN|+|F_2N|)=|AM|+|AF_1|-|F_2N|=|AB|+|AF_2|-|F_2B|=2|AB|=2$，

$\therefore a=1,c=2,b=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$，



所以双曲线E的方程为$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$，

对 A，由题可得双曲线E的渐近线方程为$y=\pm\dfrac{b}{a}x=\pm\sqrt{3}x$，故 A 正确；

对 B，由双曲线的性质可知过点$(1,1)$的直线与渐近线平行时与双曲线有且仅有一个公共点，

又过点$(1,1)$的直线斜率不存在时，即$x=1$与双曲线$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$有且仅有一个公共点，

故过点$(1,1)$的直线存在三条直线与双曲线E有且仅有一个交点，故 B 错误.

对 C，因为$\triangle AF_1F_2$面积为$S_{\triangle AF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|F_1F_2||y_A|=2|y_A|$，因此只需求$|y_A|$的范围即可，可取临界位置，

当AF_1与渐近线平行时，不妨设$AF_1:y=\sqrt{3}(x+2)$，令$x=0$可得$y=2\sqrt{3}$，

当PF_2与另一条渐近线平行时，不妨设$PF_2:y=-\sqrt{3}(x-2)$，联立双曲线方程$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$，

解得$x=\dfrac{5}{4},y=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，即$P\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$，所以$PF_1:y=\dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\frac{5}{4}+2}(x+2)$，令$x=0$可得$y=\dfrac{6\sqrt{3}}{13}$，

所以$|y_A|\in\left(\dfrac{6\sqrt{3}}{13},2\sqrt{3}\right)$，$S_{\triangle AF_1F_2}\in\left(\dfrac{12\sqrt{3}}{13},4\sqrt{3}\right)$，故 C 正确；

对 D，当$PF_1\perp PF_2$时，则$|PF_1|-|PF_2|=2$，$|PF_1|^2+|PF_2|^2=4^2$，解得$|PF_1|=\sqrt{7}+1,|PF_2|=\sqrt{7}-1$，

故$\triangle PAF_2$的内切圆的周长为$|PA|+|AF_2|+|F_2P|=|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{7}$，

$\triangle PF_1F_2$的面积为$S_{\triangle PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|PF_1||PF_2|=\dfrac{1}{2}(\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-1)=3$，

由题可知$\mathrm{Rt}\triangle PF_1F_2\sim\mathrm{Rt}\triangle OF_1A$，故$\dfrac{|OA|}{|OF_1|}=\dfrac{|PF_2|}{|PF_1|}$，$\dfrac{|OA|}{2}=\dfrac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+1}$，即$|OA|=\dfrac{8-2\sqrt{7}}{3}$，

所以 $S_{\triangle AF_1F_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2||OA|=\frac{16-4\sqrt{7}}{3}$， $S_{\triangle PAF_2}=S_{\triangle PF_1F_2}-S_{\triangle AF_1F_2}=3-\frac{16-4\sqrt{7}}{3}=\frac{4\sqrt{7}-7}{3}$， 设 $\triangle PAF_2$ 的内切圆的半径为 r，

则 $S_{\triangle PAF_2}=\frac{4\sqrt{7}-7}{3}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{7}\cdot r$， 即 $r=\frac{4-\sqrt{7}}{3}$， $\triangle PAF_2$ 的内切圆的面积为 $\pi r^2=\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^2\pi$， 故 D 错误.

故选：AC.

三、填空题：.

13. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　14、 30　　　15、 （4， 6）.　　　16、 $\frac{15}{16}\pi R^2$　　$\pi R^2\left(k+\frac{1}{2^k}-1\right)$

16.【解析】因为 $S_1=\frac{\pi R^2}{2}$， $S_2=\frac{3\pi R^2}{4}$，所以 $S_k=\pi R^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^k}\right)=\pi R^2\cdot\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\pi R^2\left(1-\frac{1}{2^k}\right)$，

所以 $S_4=\pi R^2\left(1-\frac{1}{2^4}\right)=\frac{15}{16}\pi R^2$.

$$\sum_{k=1}^{n}S_k=\pi R^2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\cdots\cdots+\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\right]=\pi R^2\left[k-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^k}\right)\right]=\pi R^2\left[k-\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)}{1-\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\pi R^2\left(k+\frac{1}{2^k}-1\right).$$

解答题：

17、（1）由图象可知 $y=f(x)$ 的最大值为 1，最小值-1，故 $A=1$；

又 $\frac{T}{4}=\frac{2\pi}{3}-\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{4\omega}\therefore\omega=2$，

将点 $\left(\frac{2\pi}{3},-1\right)$ 代入 $y=f(x)$， $f(\frac{2\pi}{3})=\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)=-1$

$\therefore\frac{4\pi}{3}+\varphi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi$，

$\because|\varphi|<\frac{\pi}{2}\therefore\varphi=\frac{\pi}{6}$

故答案为： $T=\pi$， $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

（2）由 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $g(x)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

$\because x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$\therefore 2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$

$\therefore$当$2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$时，即$x=0$，$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)_{\min}=-\frac{1}{2}$；

当$2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$时，即$x=\frac{\pi}{3}$，$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)_{\max}=1$

故答案为：$1,\frac{1}{2}$

18、【详解】（1）当$n=1$时，可得$a_1=1$，

当$n\geq 2$时，$a_1+3a_2+\cdots+(2n-1)a_n=n$，

$a_1+3a_2+\cdots+(2n-3)a_{n-1}=n-1(n\geq 2)$，

上述两式作差可得$a_n=\frac{1}{2n-1}(n\geq 2)$，

因为$a_1=1$满足$a_n=\frac{1}{2n-1}$，所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{1}{2n-1}$.

（2）$c_n=\begin{cases}\frac{2n-1}{19},n\text{为奇数}\\ \frac{1}{(2n-1)(2n+3)},n\text{为偶数}\end{cases}$，

所以$c_1+c_3+\cdots+c_{19}=\frac{1+5+9+\cdots+37}{19}=\frac{(1+37)\times 10}{2\times 19}=10$，

$c_2+c_4+\cdots+c_{20}=\frac{1}{3\times 7}+\frac{1}{7\times 11}+\cdots+\frac{1}{39\times 43}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{39}-\frac{1}{43}\right)=\frac{10}{129}$.

所以数列$\{c_n\}$的前 20 项和为$\frac{1300}{129}$.

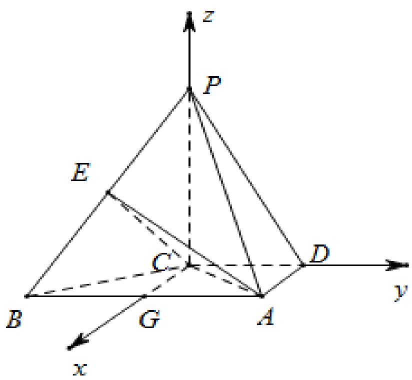
19. 【解析】（1）$PC\perp$平面$ABCD$，$AC\subset$平面$ABCD$，得$AC\perp PC$.又$AD=CD=1$，在$Rt\Delta ADC$中，得$AC=\sqrt{2}$，设AB中点为G，连接CG，

则四边形$ADCG$为边长为 1 的正方形，所以$CG\perp AB$，且$BC=\sqrt{2}$，

因为$AC^2+BC^2=AB^2$，所以$AC\perp BC$，又因为$BC\cap PC=C$，所以$AC\perp$平面PBC，

又$AC\subset$平面EAC，所以平面$EAC\perp$平面PBC.

（2）以C为坐标原点，分别以射线CD、射线CP为y轴和z轴的正方向，建立如图空间直角坐标系，



则$C(0,0,0)$，$A(1,1,0)$，$B(1,-1,0)$.

又设$P(0,0,a)(a>0)$，则$E\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{a}{2}\right)$，$\overrightarrow{CA}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{CP}=(0,0,a)$，

$\overrightarrow{CE}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{a}{2}\right)$，$\overrightarrow{PA}=(1,1,-a)$.

由$BC\perp AC$且$BC\perp PC$知，$\vec{m}=\overrightarrow{CB}=(1,-1,0)$为平面$PAC$的一个法向量.

设$\vec{n}=(x,y,z)$为平面EAC的一个法向量，则$\vec{n}\cdot\overrightarrow{CA}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0$，

即 $\begin{cases}x+y=0\\x-y+az=0\end{cases}$，取 $x=a$，$y=-a$，则 $\vec{n}=(a,-a,-2)$，有 $\left|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\right|=\dfrac{\left|\vec{m}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，得 $a=2$，从而 $\vec{n}=(2,-2,-2)$，$\overrightarrow{PA}=(1,1,-2)$.

设直线 PA 与平面 EAC 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\left|\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{PA}\rangle\right|=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{PA}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PA}\right|}=\dfrac{|2-2+4|}{\sqrt{6}\times\sqrt{12}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

即直线 PA 与平面 EAC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

20、【详解】（1）解：由题意得 $\bar{x}=\dfrac{1+2+3+4+5}{5}=3$，$\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i=1\times10+2\times12+3\times17+4\times20+5\times26=295$，

$\bar{y}=\dfrac{10+12+17+20+26}{5}=17$，$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$.

所以 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}=\dfrac{295-5\times3\times17}{55-45}=4$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=17-4\times3=5$.

所以 y 关于 x 的线性回归方程为 $y=4x+5$，令 $y=4x+5>50$，得 $x>11.25$，

所以最小的整数为 12，$2016+12=2028$，

所以该地区新能源汽车的销量最早在 2028 年能突破 50 万辆.

（2）解：①由题意知，该地区 200 名购车者中女性有 $200-95-45=60$ 名，

故其中购置新能源汽车的女性车主的有 $60-20=40$ 名.

所购置新能源汽车的车主中，女性车主所占的比例为 $\dfrac{40}{40+45}=\dfrac{8}{17}$.

所以该地区购置新能源汽车的车主中女性车主的概率为 $\dfrac{8}{17}$.

预测该地区 2023 年购置新能源汽车的销量为 33 万辆，

因此预测该地区 2020 年购置新能源汽车的女性车主的人数为 $\dfrac{8}{17}\times33\approx15.5$ 万人

②由题意知，$p=\dfrac{45}{w+45},0\le w\le135$，则 $f(p)=C_5^3p^3(1-p)^2=10\left(p^5-2p^4+p^3\right)$

$f'(p)=10\left(5p^4-8p^3+3p^2\right)=10p^2\left(5p^2-8p+3\right)$

$=10p^2(p-1)(5p-3)$

当 $p\in\left(0,\dfrac{3}{5}\right)$ 时，知 $f'(p)>0$ 所以函数 $f(p)$ 单调递增

当 $p\in\left(\dfrac{3}{5},1\right)$ 时，知 $f'(p)<0$ 所以函数 $f(p)$ 单调递减

所以当 $p=\dfrac{3}{5}$, $f(p)$ 取得最大值 $f\left(\dfrac{3}{5}\right)=C_5^3\left(\dfrac{3}{5}\right)^3\left(1-\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{216}{625}$.

此时$\dfrac{45}{w+45}=\dfrac{3}{5}$，解得$w=30$，所以当$w=30$时$f(p)$取得最大值$\dfrac{216}{625}$.

（1）由已知条件得$\dfrac{1^2}{4}+m^2=1$，因为$m>0$，则$m=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，又$F_1(-\sqrt{3},0),F_2(\sqrt{3},0)$，

因此$\triangle F_1MF_2$的面积为$S_{\triangle F_1MF_2}=\dfrac{1}{2}|F_1F_2|\cdot m=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{2}$.

（2）设$A(x_A,y_A),B(x_B,y_B)$，由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=kx-\dfrac{3}{5}\end{cases}$，得$\left(4k^2+1\right)x^2-\dfrac{24}{5}kx-\dfrac{64}{25}=0$，

$x_A+x_B=\dfrac{24k}{5\left(4k^2+1\right)},x_Ax_B=-\dfrac{64}{25\left(4k^2+1\right)}$，又$y_A=kx_A-\dfrac{3}{5}$，$y_B=kx_B-\dfrac{3}{5}$，

$\overrightarrow{MA}=\left(x_A,y_A-1\right),\overrightarrow{MB}=\left(x_B,y_B-1\right)$，

于是$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=x_Ax_B+(kx_A-\dfrac{8}{5})(kx_B-\dfrac{8}{5})=\left(k^2+1\right)x_Ax_B-\dfrac{8}{5}k\left(x_A+x_B\right)+\dfrac{64}{25}$

$=\left(k^2+1\right)\cdot\left[-\dfrac{64}{25\left(4k^2+1\right)}\right]-\dfrac{8}{5}k\cdot\dfrac{24k}{5\left(4k^2+1\right)}+\dfrac{64}{25}$

$=-\dfrac{64\left(k^2+1\right)}{25\left(4k^2+1\right)}-\dfrac{192k^2}{25\left(4k^2+1\right)}+\dfrac{64\left(4k^2+1\right)}{25\left(4k^2+1\right)}=0$，

即$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$为定值.

（3）因为直线$OP:y=k_1x$与$\odot M$相切，则$\dfrac{|k_1s-t|}{\sqrt{k_1^2+1}}=r$，即$\left(s^2-r^2\right)k_1^2-2stk_1+t^2-r^2=0$，

同理，由直线$OQ:y=k_2x$与$\odot M$相切，可得$\left(s^2-r^2\right)k_2^2-2stk_2+t^2-r^2=0$，

于是k_1、k_2是关于ξ的方程$\left(s^2-r^2\right)\xi_2^2-2st\xi_2+t^2-r^2=0$的两实根，

注意到$|s|\neq r$，且$\dfrac{s^2}{4}+t^2=1$，故$k_1k_2=\dfrac{t^2-r^2}{s^2-r^2}=\dfrac{\left(1-\dfrac{s^2}{4}\right)-r^2}{s^2-r^2}$，

因k_1k_2为定值，故不妨设$k_1k_2=\delta$（定值），

于是有$\delta=\dfrac{1-\dfrac{s^2}{4}-r^2}{s^2-r^2}$，即$\left(\delta+\dfrac{1}{4}\right)s^2+\left[-1+\left(1-\delta\right)r^2\right]=0$.

依题意可知，s变化，而r、δ均为定值，即有$\begin{cases}\delta+\dfrac{1}{4}=0\\ -1+\left(1-\delta\right)r^2=0\end{cases}$，解得$k_1k_2=\delta=-\dfrac{1}{4}$，$r=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=k_1x\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1^2=\dfrac{4}{1+4k_1^2}\\ y_1^2=\dfrac{4k_1^2}{1+4k_1^2}\end{cases}$，同理 $\begin{cases}x_2^2=\dfrac{4}{1+4k_2^2}\\ y_2^2=\dfrac{4k_2^2}{1+4k_2^2}\end{cases}$，

所以 $|OP|^2\cdot|OQ|^2=\left(x_1^2+y_1^2\right)\left(x_2^2+y_2^2\right)=\dfrac{4\left(1+k_1^2\right)}{1+4k_1^2}\times\dfrac{4\left(1+k_2^2\right)}{1+4k_2^2}$

$=\dfrac{16(1+k_1^2+k_2^2+k_1^2k_2^2)}{1+4k_1^2+4k_2^2+16k_1^2k_2^2}=\dfrac{17+16k_1^2+16k_2^2}{2+4k_1^2+4k_2^2}=4+\dfrac{9}{2+4\left(k_1^2+k_1^2\right)}\le 4+\dfrac{9}{2+4\cdot 2\cdot|k_1k_2|}=\dfrac{25}{4}$，当且仅当

$|k_1|=|k_2|=\dfrac{1}{2}(k_1k_2<0)$ 时取等号，

因此 $4<|OP|^2\cdot|OQ|^2\le\dfrac{25}{4}$，解得 $2<|OP|\cdot|OQ|\le\dfrac{5}{2}$，所以 $|OP|\cdot|OQ|$ 的范围为 $(2,\dfrac{5}{2}]$，

当 $k_1=-k_2=\dfrac{1}{2}$ 或 $-k_1=k_2=\dfrac{1}{2}$ 时，直线 OP,OQ 关于坐标轴对称，此时圆心 M 为椭圆顶点，

所以圆 M 的方程为 $\left(x\pm2\right)^2+y^2=\dfrac{4}{5}$ 或 $x^2+(y\pm1)^2=\dfrac{4}{5}$.

22、【解析】(1)函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{-x}\left(x+1\right)$ 定义域为 R，求导得 $f'(x)=-x\mathrm{e}^{-x}$，当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$，

因此，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以当 $x=0$ 时，函数 $f(x)$ 有极大值 1，无极小值.

(2)令 $\ln t_1=x_1,\ln t_2=x_2$，即 $t_1=\mathrm{e}^{x_1},t_2=\mathrm{e}^{x_2}$，

则 $t_2\ln t_1-t_1\ln t_2=t_1-t_2\Leftrightarrow x_1\mathrm{e}^{x_2}-x_2\mathrm{e}^{x_1}=\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{x_2}\Leftrightarrow\dfrac{x_1+1}{\mathrm{e}^{x_1}}=\dfrac{x_2+1}{\mathrm{e}^{x_2}}\Leftrightarrow f(x_1)=f(x_2)$，

依题意，两个不等的实数 x_1,x_2 满足 $f(x_1)=f(x_2)$，且不等式 $x_1+\lambda x_2>0$ 恒成立，

不妨令 $x_1<x_2$，由(1)知，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上递增，在 $(0,+\infty)$ 上递减，且当 $x>0$ 时，$f(x)>0$ 恒成立，而 $f(-1)=0$，

因此有 $-1<x_1<0<x_2$，由 $x_1+\lambda x_2>0$ 知，$\lambda x_2>-x_1$，$\lambda>0$，则有 $x_2>-\dfrac{x_1}{\lambda}>0$，而 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减，

从而有 $f(x_1)=f(x_2)<f(-\dfrac{x_1}{\lambda})$，即 $\dfrac{x_1+1}{\mathrm{e}^{x_1}}<\dfrac{-\dfrac{x_1}{\lambda}+1}{\mathrm{e}^{-\frac{x_1}{\lambda}}}$，两边取对数得：$\ln(x_1+1)-x_1<\ln(1-\dfrac{x_1}{\lambda})+\dfrac{x_1}{\lambda}$，

即 $\lambda\ln(x_1+1)-\lambda\ln(1-\dfrac{x_1}{\lambda})-(1+\lambda)x_1<0$，$-1<x_1<0$，令 $g(x)=\lambda\ln(x+1)-\lambda\ln(1-\dfrac{x}{\lambda})-(1+\lambda)x$，$-1<x<0$，

$g'(x)=\dfrac{\lambda}{x+1}+\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{\lambda}}-(1+\lambda)=\dfrac{(1+\lambda)x(x+1-\lambda)}{(x+1)(\lambda-x)}$，

当 $\lambda\ge1$ 时，$g'(x)>0$，则 $g(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，$g(x)<g(0)=0$，符合题意，

当 $0<\lambda<1$ 时，即 $-1<\lambda-1<0$，当 $\lambda-1<x<0$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(\lambda-1,0)$ 上单调递减，

当 $\lambda-1<x<0$ 时，$g(x)>g(0)=0$，不符合题意，综上得：$\lambda\ge1$，

所以实数 λ 的取值范围是 $[1,+\infty)$.