

2023 年福州市普通高中毕业班质量检测

数学试题参考答案与评分细则

一、单项选择题：

1-8 D B C A B D C D

8【解析】因为 $f(x) + g(x-3) = 2$ ，所以 $f(x+3) + g(x) = 2$ ，又 $f(1-x) + g(x) = 2$ ，

则有 $f(x+3) = f(1-x)$ ，因为 $f(x+1)$ 是奇函数，所以 $f(x+1) = -f(1-x)$ ，可得 $f(x+3) = -f(x+1)$ ，即有 $f(x+2) = -f(x)$ 与 $f(x+4) = -f(x+2)$ ，即 $f(x+4) = f(x)$ ，所以 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，故 $g(x)$ 也是周期为 4 的周期函数。

因为 $-f(-x) = f(x+2)$ ，所以 $f(-x) = f(x)$ ，所以 $f(x)$ 为偶函数。故 A 错误；

由 $f(x+1)$ 是奇函数，则 $f(1) = 0$ ，所以 $f(3) = 0$ ，又 $f(2) + f(4) = f(2) + f(0) = 0$ ，

所以 $\sum_{k=1}^{20} f(k) = 5[f(1) + f(2) + f(3) + f(4)] = 0$ ，所以 C 选项错误；

由 $f(1) = 0$ 得 $g(0) = 2$ ，所以 B 选项错误；

因为 $g(2) = 2 - f(5) = 2 - f(1) = 2$ ，

$g(1) + g(3) = [2 - f(4)] + [2 - f(6)] = 4 - [f(4) + f(2)] = 4$ ，

所以 $g(0) + g(1) + g(2) + g(3) = 8$ ，所以 $\sum_{k=1}^{20} g(k) = 5[g(0) + g(1) + g(2) + g(3)] = 40$ ，

所以 D 选项正确。

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. BCD 10. BD 11. BC 12. AD

12【解析一】由 $\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 3$ ，令 $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = \sqrt{3}\cos\theta, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y = \sqrt{3}\sin\theta, \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta, \\ y = 2\sin\theta, \end{cases}$

故 $2x + y = 2\sqrt{3}\cos\theta - 2\sin\theta + 2\sin\theta = 2\sqrt{3}\cos\theta \in [-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$ ，故 A 正确；B 错误；

$x^2 + y^2 - xy = 3 - 2xy = 3 - 2(\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta) \cdot 2\sin\theta = 5 - 4\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) \in [1, 9]$ ，故 C 错误；D

正确，故选 AD。

12【解析二】令 $2x + y = t$ ，则 $y = t - 2x$ 代入 $x^2 + xy + y^2 = 3$ ，整理可得， $3x^2 - 3tx + t^2 - 3 = 0$ ，

因为 $x \in \mathbf{R}$ ，所以 $\Delta = 9t^2 - 12(t^2 - 3) = -3(t^2 - 12) \geq 0$ ，解得 $-2\sqrt{3} \leq t \leq 2\sqrt{3}$ ，故 A 正确；B 错

误;

由 $x^2 + xy + y^2 = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 = 3 - xy$, 因为 $x^2 + y^2 \geq 2|xy|$, 所以 $3 - xy \geq 2|xy|$, 所以 $-3 \leq xy \leq 1$, 又 $x^2 + xy + y^2 = 3 - 2xy$, 从而 $1 \leq 3 - 2xy \leq 9$, 故 C 错误; D 正确, 故选 AD.

12【解析三】令 $x = u + v$, $y = u - v$, 代入 $x^2 + xy + y^2 = 3$, 得 $u^2 + \frac{v^2}{3} = 1$,

令 $u = \cos \theta, v = \sqrt{3} \sin \theta$ ($\theta \in [0, 2\pi]$).

$2x + y = 3u + v = 3\cos \theta + \sqrt{3}\sin \theta = 2\sqrt{3}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \in [-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$, 故 A 正确, B 错误;

$x^2 + y^2 - xy = u^2 + 3v^2 = \cos^2 \theta + 9\sin^2 \theta = 1 + 8\sin^2 \theta \in [1, 9]$, 故 D 正确, C 错误;

故选 AD.

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $-\frac{24}{7}$ 14. 0.64 15. 11 16. $x - y + 4 = 0$

15【解析一】: 令 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 2$, 则 $f'(x) = 3x^2 - 6x + 6$, 设 $P(m, 1)$, $Q(n, f(n))$, 依题意 $f'(m) = f'(n)$, 所以 $3m^2 - 6m + 6 = 3n^2 - 6n + 6$, 则 $m^2 - n^2 = 2(m - n)$, 显然 $m \neq n$, 则 $m + n = 2$, 因为 $f(x) = (x - 1)^3 + 3(x - 1) + 6$, 所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 6)$ 中心对称, 所以点 P 与点 Q 关于点 $(1, 6)$ 对称, 所以 $\frac{f(n) + 1}{2} = 6$, 则 $f(n) = 11$.

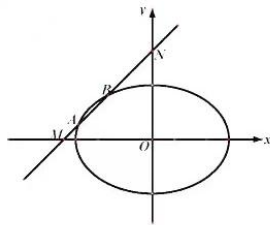
15【解析二】: 令 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 2$, 因为 $f'(x) = 3(x - 1)^2 + 3 > 0$, 故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 令 $x^3 - 3x^2 + 6x + 2 = 1$, 设其根为 x_p , 得 $x_p^3 - 3x_p^2 + 6x_p = -1$. 由于 $f(x)$ 在点 P 处的切线与在点 Q 处的切线平行, 得 $f'(x) = k$ 存在两实根, 其中一个为 x_p , 设另一个为 x_q . 即 $3x^2 - 6x + 6 = k$ 两根为 x_p, x_q , 由韦达定理得 $x_p + x_q = 2$, 则 $x_q = 2 - x_p$, 从而

$$\begin{aligned} f(x_q) &= x_q^3 - 3x_q^2 + 6x_q + 2 = (2 - x_p)^3 - 3(2 - x_p)^2 + 6(2 - x_p) + 2 \\ &= -x_p^3 + 6x_p^2 - 12x_p + 8 - 3x_p^2 + 12x_p - 12 + 12 - 6x_p + 2 = -(x_p^3 - 3x_p^2 + 6x_p) + 10 = 11. \end{aligned}$$

16【解析一】: 由条件得 B 点为线段 MN 中点, 设 B 点坐标为 (x_0, y_0) , 得 $M(2x_0, 0)$ 、 $N(0, 2y_0)$, 由 $|MA| : |AB| = 1 : 2$ 得 A 坐标为 $A(\frac{5x_0}{3}, \frac{y_0}{3})$, 将 A 、 B 坐标分别代入 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1$ 中, 得

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{12} + \frac{y_0^2}{6} = 1, \\ \frac{25x_0^2}{12 \times 9} + \frac{y_0^2}{6 \times 9} = 1, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x_0 = -2, \\ y_0 = 2, \end{cases} \quad \text{则 } M、N \text{ 坐标分别为 } (-4, 0)、$$

$(0, 4)$, 直线 l 的方程为 $x - y + 4 = 0$.



16 【解析二】：设直线 l 方程为 $y = kx + m$ ($k, m > 0$)，可得 $M\left(-\frac{m}{k}, 0\right)$ ， $N(0, m)$ ，根据 $|MA|:|AB|:|BN| = 1:2:3$ 得 A, B 坐标分别为 $\left(-\frac{5m}{6k}, \frac{m}{6}\right), \left(-\frac{m}{2k}, \frac{m}{2}\right)$ ，将 A, B 坐标代入 C 方程中，可得

$$\begin{cases} \frac{25m^2}{12 \times 36k^2} + \frac{m^2}{6 \times 36} = 1, \\ \frac{m^2}{12 \times 4k^2} + \frac{m^2}{6 \times 4} = 1, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 25m^2 + 2m^2k^2 = 12 \times 36k^2, \\ m^2 + 2m^2k^2 = 12 \times 4k^2, \end{cases} \quad \text{两式相减得 } m = 4k,$$

将其代入 $m^2 + 2m^2k^2 = 12 \times 4k^2$ ，得 $k = 1$ ，从而直线 l 的方程为 $x - y + 4 = 0$ 。

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

【命题意图】本小题主要考查正弦定理、余弦定理、三角恒等变换、基本不等式等基础知识；考查运算求解能力；考查化归与转化思想、函数与方程思想等；导向对发展逻辑推理、数学运算等核心素养的关注；体现基础性和综合性。满分 10 分。

【解析】(1) 由余弦定理可得 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B$ ，
代入 $b^2 - a^2 = 2c^2$ ，得到 $(c^2 + a^2 - 2ac \cos B) - a^2 = 2c^2$ ，…………… 1 分
化简得 $c^2 + 2ac \cos B = 0$ ，
即 $c + 2a \cos B = 0$ ，…………… 2 分
由正弦定理可得 $\sin C + 2 \sin A \cos B = 0$ ，
即 $\sin(A + B) + 2 \sin A \cos B = 0$ ，…………… 3 分
 $\sin A \cos B + \cos A \sin B + 2 \sin A \cos B = 0$ ，
 $3 \sin A \cos B = -\cos A \sin B$ ，…………… 4 分
可得 $\frac{\tan B}{\tan A} = -3$ ，…………… 5 分
(2) 由 (1) 可知 $\tan B = -3 \tan A$ ，所以 $\tan A$ 与 $\tan B$ 异号，
又 $b^2 - a^2 = 2c^2 > 0$ ，故 $b > a$ ，则有 $B > A$ ，
因为 $A, B \in (0, \pi)$ ，故 A 为锐角， B 为钝角，则 C 为锐角，…………… 6 分
所以 $\tan C = -\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{\tan A \tan B - 1} = \frac{\tan A - 3 \tan A}{-3 \tan^2 A - 1} = \frac{2 \tan A}{3 \tan^2 A + 1}$ …………… 7 分
 $= \frac{2}{3 \tan A + \frac{1}{\tan A}} \leq \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，…………… 8 分
等号当且仅当 $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，即 $A = \frac{\pi}{6}$ 时成立，…………… 9 分
所以 C 的最大值为 $\frac{\pi}{6}$ 。…………… 10 分

【解析二】(1) 由正弦定理可得: $\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{b}{a}$, 1 分

由余弦定理可得: $\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}$, 2 分

则 $\frac{\tan B}{\tan A} = \frac{\sin B}{\sin A} \cdot \frac{\cos A}{\cos B} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2 + c^2 - b^2}$, 3 分

因为 $b^2 - a^2 = 2c^2$, 所以 $\frac{\tan B}{\tan A} = \frac{c^2 + 2c^2}{c^2 - 2c^2} = -3$, 5 分

(2) $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ 6 分

$$= \frac{a^2 + b^2 - \frac{b^2 - a^2}{2}}{2ab} \text{ 7 分}$$

$$= \frac{3a^2 + b^2}{4ab} = \frac{3a}{4b} + \frac{b}{4a}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{3}{16}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 8 分}$$

所以 $C \leq \frac{\pi}{6}$, 等号当且仅当 $b^2 = 3a^2$ 时, 即 $b = \sqrt{3}a$ 时成立, 9 分

所以 C 的最大值为 $\frac{\pi}{6}$ 10 分

【解析三】(1) 由 $b^2 - a^2 = 2c^2$, 由正弦定理可得, $\sin^2 B - \sin^2 A = 2\sin^2 C$, 1 分

$$\begin{aligned} \text{因为 } \sin^2 B - \sin^2 A &= \sin^2 B - \sin^2 B \sin^2 A + \sin^2 B \sin^2 A - \sin^2 A \\ &= \sin^2 B(1 - \sin^2 A) - \sin^2 A(1 - \sin^2 B) = \sin^2 B \cos^2 A - \sin^2 A \cos^2 B \end{aligned}$$

$$= (\sin B \cos A + \cos B \sin A)(\sin B \cos A - \cos B \sin A) = \sin(A+B)\sin(B-A), \text{ 3 分}$$

又因为 $A+B+C = \pi$, 所以 $\sin C = \sin(A+B)$,

$$\text{所以 } \sin(A+B)\sin(B-A) = 2\sin^2(A+B),$$

因为 $0 < A+B < \pi$, 所以 $\sin(A+B) \neq 0$, 所以 $\sin(B-A) = 2\sin(A+B)$,

化简得 $-3\sin A \cos B = \sin B \cos A$, 4 分

可得 $\frac{\tan B}{\tan A} = -3$ 5 分

(2) 同解析一, 10 分

18. (本小题满分 12 分)

【命题意图】本小题主要考查空间几何体点、线、面位置关系、直线与平面所成角等基础知识；考查空间想象能力、逻辑推理能力、运算求解能力；考查化归与转化思想，数形结合思想等；导向对发展直观想象、逻辑推理和数学运算等核心素养的关注；体现基础性与综合性。满分 12 分。

【解析】(1) 取 PD 中点 F ，连接 AF 、 EF 。

$$\because EF \parallel CD, EF = \frac{1}{2}CD, AB \parallel CD, AB = \frac{1}{2}CD,$$

$$\therefore EF \parallel AB, EF = AB, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 为平行四边形，

$$\therefore BE \parallel AF, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

又 $\because BE \not\subset$ 平面 PAD , $AF \subset$ 平面 PAD ,

$$\therefore BE \parallel \text{平面 } PAD. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 取 AD 中点 O , BC 中点 G , 连接 PO, OG , 可得 $PO \perp AD$, $OG \parallel CD$ 。

$\because$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $PO \perp AD$, $PO \subset$ 平面 PAD ,

$$\therefore PO \perp \text{平面 } ABCD. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$\because AD \perp CD$, $OG \parallel CD$,

$$\therefore OG \perp OA. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

以 O 为原点, 以 AD, OG, OP 所在直线为 x 轴、 y 轴、 z 轴,

建立如图所示空间直角坐标系. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

因为 $AB = 2, CD = 4, AD = 2\sqrt{3}$, $\triangle PAD$ 是等边三角形,

$$\text{所以 } PD = AD = 2\sqrt{3}, OA = \frac{1}{2}AD = \sqrt{3}, PO = \sqrt{PD^2 - OD^2} = 3,$$

$$\text{所以 } A(\sqrt{3}, 0, 0), B(\sqrt{3}, 2, 0), C(-\sqrt{3}, 4, 0), P(0, 0, 3).$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AB} = (0, 2, 0), \overrightarrow{BC} = (-2\sqrt{3}, 2, 0), \overrightarrow{BP} = (-\sqrt{3}, -2, 3). \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

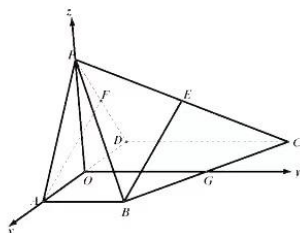
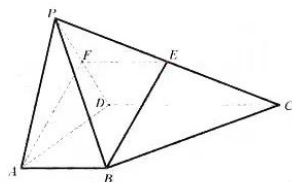
设平面 PBC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 由 $\overrightarrow{BC} \cdot \mathbf{n} = 0$, $\overrightarrow{BP} \cdot \mathbf{n} = 0$,

$$\text{可得 } \begin{cases} -2\sqrt{3}x + 2y = 0, \\ -\sqrt{3}x - 2y + 3z = 0, \end{cases} \text{ 令 } x = 1, \text{ 可得 } y = \sqrt{3}, z = \sqrt{3},$$

$$\text{从而 } \mathbf{n} = (1, \sqrt{3}, \sqrt{3}) \text{ 是平面 } PBC \text{ 的一个法向量.} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{则 } \cos \langle \overrightarrow{AB}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{n}}{|\overrightarrow{AB}| |\mathbf{n}|} = \frac{2\sqrt{3}}{2 \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{所以直线 } AB \text{ 与平面 } PBC \text{ 所成角的正弦值为 } \frac{\sqrt{21}}{7}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$



19. (本小题满分 12 分)

【命题意图】本小题主要考查数列通项, 数列求和等基础知识; 考查欧拉函数概念的理解和应用; 考查逻辑推理能力、运算求解能力等; 考查化归与转化思想、特殊与一般思想等; 导向对发展数学抽象、逻辑推理、数学运算等核心素养的关注; 体现基础性、应用性与创新性. 满分 12 分.

【解析】(1) 不超过 9, 且与其互质的数即为 $[1, 9]$ 中排除掉 3, 6, 9 剩下的正整数,

$$\text{则 } \varphi(3^2) = 3^2 - 3 = 6; \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

不超过 27, 且与其互质的数即为 $[1, 27]$ 中排除掉 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27 剩下的正整数,

$$\text{则 } \varphi(3^3) = 3^3 - 9 = 18. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 因为 $[3k-2, 3k]$ ($k=1, 2, \dots, 3^{n-1}$) 中与 3^n 互质的正整数只有 $3k-2$ 与 $3k-1$ 两个,

所以 $[1, 3^n]$ 中与 3^n 互质的正整数个数为 $2 \times 3^{n-1}$,

$$\text{所以 } \varphi(3^n) = 2 \times 3^{n-1}, \quad a_n = \frac{1}{2} \varphi(3^n) = \frac{1}{2} \times 2 \times 3^{n-1} = 3^{n-1}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \frac{\log_3 a_n}{a_n} = \frac{n-1}{3^{n-1}}. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

设数列 $\left\{ \frac{\log_3 a_n}{a_n} \right\}$ 的前 n 项和为 T_n .

$$T_n = 0 + \frac{1}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{n-1}{3^{n-1}}, \quad \frac{1}{3} T_n = 0 + \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots + \frac{n-1}{3^n}, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) T_n = \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} - \frac{n-1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{3^n} \times \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{n-1}{3^n} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^{n-1}} - \frac{n-1}{3^n} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2n+1}{2 \times 3^n}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\text{则 } T_n = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2n+1}{2 \times 3^n} \right) = \frac{3}{4} - \frac{2n+1}{4 \times 3^{n-1}}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

说明: 不超过 3^n , 且与其互质的正整数即为排除掉 3 的倍数的数, 在每相邻的三个正整数中排除掉是 3 的倍数的数即可, 可得 $a_n = \frac{1}{2} \varphi(3^n) = \frac{1}{2} \times (3^n - 3^{n-1}) = 3^{n-1}$, 学生若这样写, 同样可以给 3 分.

20. (本小题满分 12 分)

【命题意图】本小题主要考查分层抽样得到样本的均值与方差、正态分布和二项分布等基础

知识；考查数据处理能力、应用意识和创新意识等，考查统计与概率思想；导向对发展逻辑推理、数学运算、数学建模、数据分析等核心素养的关注；体现综合性、应用性与创新性。满分 12 分。

【解析一】(1) 把男性样本记为 $x_1, x_2, \dots, x_{120}$ ，其平均数记为 $\bar{x}$ ，方差记为 s_x^2 ；把女性样本记为 $y_1, y_2, \dots, y_{90}$ ，其平均数记为 $\bar{y}$ ，方差记为 s_y^2 。则 $\bar{x} = 14, s_x^2 = 6$ ； $\bar{y} = 21, s_y^2 = 17$ 。记总样本数据的平均数为 $\bar{z}$ ，方差为 s^2 。

由 $\bar{x} = 14$ ， $\bar{y} = 21$ ，根据按比例分配的分层随机抽样总样本平均数与各层样本平均数的关系，可得总样本平均数为 $\bar{z} = \frac{120}{120+90}\bar{x} + \frac{90}{120+90}\bar{y}$ 2 分

$$= \frac{120 \times 14 + 90 \times 21}{210}$$

$$= 17, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

根据方差的定义，总样本方差为

$$s^2 = \frac{1}{210} \left[\sum_{i=1}^{120} (x_i - \bar{z})^2 + \sum_{j=1}^{90} (y_j - \bar{z})^2 \right] \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$= \frac{1}{210} \left[\sum_{i=1}^{120} (x_i - \bar{x} + \bar{x} - \bar{z})^2 + \sum_{j=1}^{90} (y_j - \bar{y} + \bar{y} - \bar{z})^2 \right],$$

$$\text{由 } \sum_{i=1}^{120} (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{120} x_i - 120\bar{x} = 0, \text{ 可得 } \sum_{i=1}^{120} 2(x_i - \bar{x})(\bar{x} - \bar{z}) = 2(\bar{x} - \bar{z}) \sum_{i=1}^{120} (x_i - \bar{x}) = 0,$$

$$\text{同理, } \sum_{j=1}^{90} 2(y_j - \bar{y})(\bar{y} - \bar{z}) = 2(\bar{y} - \bar{z}) \sum_{j=1}^{90} (y_j - \bar{y}) = 0, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

因此，

$$s^2 = \frac{1}{210} \left[\sum_{i=1}^{120} (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{120} (\bar{x} - \bar{z})^2 + \sum_{j=1}^{90} (y_j - \bar{y})^2 + \sum_{j=1}^{90} (\bar{y} - \bar{z})^2 \right]$$

$$= \frac{1}{210} \left\{ 120 \left[s_x^2 + (\bar{x} - \bar{z})^2 \right] + 90 \left[s_y^2 + (\bar{y} - \bar{z})^2 \right] \right\}, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } s^2 = \frac{1}{210} \left\{ 120 \times [6 + (14 - 17)^2] + 90 \times [17 + (21 - 17)^2] \right\} \approx 23,$$

所以总样本的均值为 17，方差为 23，

并据此估计该项健身活动全体参与者的脂肪含量的总体均值为 17，方差为 23. 7 分

(2) 由 (1) 知 $\sigma^2 = 23$ ，所以 $X \sim N(17, 23)$ ，又因为 $\sqrt{23} \approx 4.8$ ，

所以 $P(12.2 \leq X \leq 21.8) = P(17 - 4.8 \leq X \leq 17 + 4.8) \approx 0.6827$ ， 8 分

$$P(X < 12.2) \approx \frac{1}{2} \times (1 - 0.6827) = 0.15865, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

因为 $X \sim B(3, 0.15865)$, 10 分

所以 $P(X=3) = C_3^3 \times 0.15865^3 \approx 0.004$, 11 分

所以 3 位参与者的脂肪含量均小于 12.2% 的概率为 0.004. 12 分

【解析二】(1) 把男性样本记为 $x_1, x_2, \dots, x_{120}$, 其平均数记为 $\bar{x}$, 方差记为 s_x^2 ; 把女性样本记为 $y_1, y_2, \dots, y_{90}$, 其平均数记为 $\bar{y}$, 方差记为 s_y^2 . 则 $\bar{x} = 14, s_x^2 = 6$; $\bar{y} = 21, s_y^2 = 17$. 记总样本数据的平均数为 $\bar{z}$, 方差为 s^2 .

由 $\bar{x} = 14, \bar{y} = 21$, 根据按比例分配的分层随机抽样总样本平均数与各层样本平均数的关系,

可得总样本平均数为 $\bar{z} = \frac{120}{120+90}\bar{x} + \frac{90}{120+90}\bar{y}$ 2 分

$$= \frac{120 \times 14 + 90 \times 21}{210}$$

$$= 17, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

根据方差的定义, 总样本方差为

$$s^2 = \frac{1}{210} \left[\sum_{i=1}^{120} (x_i - \bar{z})^2 + \sum_{i=1}^{90} (y_i - \bar{z})^2 \right] \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$= \frac{1}{210} \left(\sum_{i=1}^{120} x_i^2 - 2\bar{z} \sum_{i=1}^{120} x_i + 120\bar{z}^2 + \sum_{i=1}^{90} y_i^2 - 2\bar{z} \sum_{i=1}^{90} y_i + 90\bar{z}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{210} \left[\sum_{i=1}^{120} x_i^2 + \sum_{i=1}^{90} y_i^2 - 2\bar{z}(120\bar{x} + 90\bar{y}) + 210\bar{z}^2 \right]$$

$$= \frac{1}{210} \left(\sum_{i=1}^{120} x_i^2 + \sum_{i=1}^{90} y_i^2 - 2\bar{z} \cdot 210\bar{z} + 210\bar{z}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{210} \left(\sum_{i=1}^{120} x_i^2 + \sum_{i=1}^{90} y_i^2 - 210\bar{z}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{210} \left(\sum_{i=1}^{120} x_i^2 + \sum_{i=1}^{90} y_i^2 \right) - \bar{z}^2, \text{ ①} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{由 } s_x^2 = \frac{1}{120} \sum_{i=1}^{120} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{120} \sum_{i=1}^{120} x_i^2 - \bar{x}^2, \text{ 可得 } \sum_{i=1}^{120} x_i^2 = 120(s_x^2 + \bar{x}^2), \text{ ②}$$

$$\text{同理 } \sum_{i=1}^{90} y_i^2 = 90(s_y^2 + \bar{y}^2), \text{ ③}$$

将②③代入①得

$$s^2 = \frac{1}{210} \left[120(s_x^2 + \bar{x}^2) + 90(s_y^2 + \bar{y}^2) \right] - \bar{z}^2 \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$= \frac{1}{210} [120 \times (6 + 14^2) + 90 \times (17 + 21^2)] - 17^2 \approx 23,$$

所以总样本的均值为 17, 方差为 23,

并据此估计该项健身活动全体参与者的脂肪含量的总体均值为17，方差为23. 7分

(2) 同解析一. 12分

21. (本小题满分12分)

【命题意图】本小题主要考查抛物线的标准方程及简单几何性质，直线与抛物线的位置关系等基础知识；考查运算求解能力，逻辑推理能力，直观想象能力和创新能力等；考查数形结合思想，函数与方程思想，化归与转化思想等；导向对发展直观想象，逻辑推理，数学运算等核心素养的关注；体现综合性与创新性. 满分12分.

【解析】(1) 当 l_1 的斜率为 $\frac{2}{3}$ 时，得 l_1 方程为 $y = \frac{2}{3}(x+2)$, 1分

$$\text{由} \begin{cases} y^2 = 2px, \\ y = \frac{2}{3}(x+2). \end{cases} \text{消元得 } y^2 - 3py + 4p = 0, \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

$$\text{由弦长公式得 } |AB| = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{(3p)^2 - 16p} = \sqrt{13}, \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

$$\text{即 } \sqrt{9p^2 - 16p} = 2, \text{ 解得 } p = 2 \text{ 或 } p = -\frac{2}{9} \text{ (舍去),}$$

从而 E 的标准方程为 $y^2 = 4x$ 4分

$$(2) \text{ 设 } A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right), B\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right), \text{ 得 } k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{\frac{y_2^2}{4} - \frac{y_1^2}{4}} = \frac{4}{y_1 + y_2},$$

$$\text{直线 } AB \text{ 方程为 } y = \frac{4}{y_1 + y_2} \left(x - \frac{y_1^2}{4}\right) + y_1, \text{ 即 } 4x - (y_1 + y_2)y + y_1y_2 = 0, \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

又直线 AB 过点 $(-2, 0)$ ，将该点坐标代入直线方程，得 $y_1y_2 = 8$ 6分

$$\text{设 } C\left(\frac{y_3^2}{4}, y_3\right), D\left(\frac{y_4^2}{4}, y_4\right), \text{ 同理可得 } y_3y_4 = 8, \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

$$\text{直线 } AD \text{ 方程为 } 4x - (y_1 + y_4)y + y_1y_4 = 0, \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

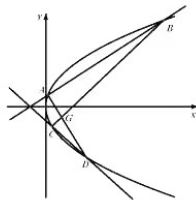
$$\text{直线 } BC \text{ 方程为 } 4x - (y_2 + y_3)y + y_2y_3 = 0, \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

因为 $(-2, 0)$ 在抛物线的对称轴上，由对称性可知，交点 G 必在垂直于 x 轴的直线上，所以只需证 G 的横坐标为定值即可.

$$\text{由} \begin{cases} 4x - (y_1 + y_4)y + y_1y_4 = 0, \\ 4x - (y_2 + y_3)y + y_2y_3 = 0, \end{cases} \text{ 消去 } y,$$

因为直线 AD 与 BC 相交，所以 $y_2 + y_3 \neq y_1 + y_4$,

$$\text{解得 } x = \frac{y_2y_3(y_1 + y_4) - y_1y_4(y_2 + y_3)}{4[(y_2 + y_3) - (y_1 + y_4)]}, \dots\dots\dots 10 \text{分}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{y_1 y_2 y_3 + y_2 y_3 y_4 - y_1 y_2 y_4 - y_1 y_3 y_4}{4[(y_2 + y_3) - (y_1 + y_4)]} \\
 &= \frac{8y_3 + 8y_2 - 8y_4 - 8y_1}{4[(y_2 + y_3) - (y_1 + y_4)]} \\
 &= 2, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}
 \end{aligned}$$

所以点 G 的横坐标为 2, 即直线 AD 与 BC 的交点 G 在定直线 $x=2$ 上. $\dots\dots\dots 12$ 分

【解析二】(1) 同解析一. $\dots\dots\dots 4$ 分

(2) 设直线 AB 的方程为 $y=k_1(x+2)$,

$$\text{由 } \begin{cases} y=k_1(x+2), \\ y^2=4x, \end{cases} \text{ 消去 } x \text{ 得 } k_1 y^2 - 4y + 8k_1 = 0, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

设 $A(\frac{y_1^2}{4}, y_1)$, $B(\frac{y_2^2}{4}, y_2)$, 则 $y_1 y_2 = 8$. $\dots\dots\dots 6$ 分

设直线 CD 的方程为 $y=k_2(x+2)$, $C(\frac{y_3^2}{4}, y_3)$, $D(\frac{y_4^2}{4}, y_4)$,

同理可得 $y_3 y_4 = 8$. $\dots\dots\dots 7$ 分

$$\text{直线 } AD \text{ 方程为 } y - y_1 = \frac{y_4 - y_1}{\frac{y_4^2}{4} - \frac{y_1^2}{4}}(x - \frac{y_1^2}{4}), \text{ 即 } y = \frac{4}{y_4 + y_1}x + \frac{y_1 y_4}{y_4 + y_1},$$

化简得 $4x - (y_1 + y_4)y + y_1 y_4 = 0$, $\dots\dots\dots 8$ 分

同理, 直线 BC 方程为 $4x - (y_2 + y_3)y + y_2 y_3 = 0$, $\dots\dots\dots 9$ 分

因为 $(-2, 0)$ 在抛物线的对称轴上, 由对称性可知, 交点 G 必在垂直于 x 轴的直线上, 所以只需证 G 的横坐标为定值即可.

$$\text{由 } \begin{cases} 4x - (y_1 + y_4)y + y_1 y_4 = 0, \\ 4x - (y_2 + y_3)y + y_2 y_3 = 0, \end{cases} \text{ 消去 } y,$$

因为直线 AD 与 BC 相交, 所以 $y_2 + y_3 \neq y_1 + y_4$,

$$\begin{aligned}
 \text{解得 } x &= \frac{y_2 y_3 (y_1 + y_4) - y_1 y_4 (y_2 + y_3)}{4[(y_2 + y_3) - (y_1 + y_4)]}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分} \\
 &= \frac{y_1 y_2 y_3 + y_2 y_3 y_4 - y_1 y_2 y_4 - y_1 y_3 y_4}{4[(y_2 + y_3) - (y_1 + y_4)]} \\
 &= \frac{8y_3 + 8y_2 - 8y_4 - 8y_1}{4[(y_2 + y_3) - (y_1 + y_4)]} \\
 &= 2, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}
 \end{aligned}$$

所以点 G 的横坐标为 2, 即直线 AD 与 BC 的交点 G 在定直线 $x=2$ 上. $\dots\dots\dots 12$ 分

【解析三】(1) 同解析一. $\dots\dots\dots 4$ 分

(2) 设直线 AB 方程为 $x = my - 2$, 由 $\begin{cases} x = my - 2, \\ y^2 = 4x, \end{cases}$ 消去 x 得 $y^2 - 4my + 8 = 0$, 5 分

设 $A(\frac{y_1^2}{4}, y_1)$, $B(\frac{y_2^2}{4}, y_2)$, 则 $y_1 y_2 = 8$ 6 分

设直线 CD 的方程为 $x = ny - 2$, $C(\frac{y_3^2}{4}, y_3)$, $D(\frac{y_4^2}{4}, y_4)$,

同理可得 $y_3 y_4 = 8$ 7 分

直线 AD 方程为 $y - y_1 = \frac{y_4 - y_1}{\frac{y_4^2}{4} - \frac{y_1^2}{4}}(x - \frac{y_1^2}{4})$, 即 $y = \frac{4}{y_4 + y_1}x + \frac{y_1 y_4}{y_4 + y_1}$,

化简得 $4x - (y_1 + y_4)y + y_1 y_4 = 0$, 8 分

同理, 直线 BC 方程为 $4x - (y_2 + y_3)y + y_2 y_3 = 0$, 9 分

因为 $(-2, 0)$ 在抛物线的对称轴上, 由对称性可知, 交点 G 必在垂直于 x 轴的直线上, 所以只需证 G 的横坐标为定值即可.

由 $\begin{cases} 4x - (y_1 + y_4)y + y_1 y_4 = 0, \\ 4x - (y_2 + y_3)y + y_2 y_3 = 0 \end{cases}$, 消去 y ,

因为直线 AD 与 BC 相交, 所以 $y_2 + y_3 \neq y_1 + y_4$,

解得 $x = \frac{y_2 y_3 (y_1 + y_4) - y_1 y_4 (y_2 + y_3)}{4[(y_2 + y_3) - (y_1 + y_4)]}$, 10 分

$$= \frac{y_1 y_2 y_3 + y_2 y_3 y_4 - y_1 y_2 y_4 - y_1 y_3 y_4}{4[(y_2 + y_3) - (y_1 + y_4)]}$$

$$= \frac{8y_3 + 8y_2 - 8y_4 - 8y_1}{4[(y_2 + y_3) - (y_1 + y_4)]}$$

$$= 2, \text{ 11 分}$$

所以点 G 的横坐标为 2, 即直线 AD 与 BC 的交点 G 在定直线 $x = 2$ 上. 12 分

22. (本小题满分 12 分)

【命题意图】本小题主要考查函数的单调性、最值, 不等式等基础知识; 考查逻辑推理能力, 运算求解能力和创新能力等; 考查函数与方程思想, 化归与转化思想, 数形结合思想, 分类与整合思想, 特殊与一般思想等; 导向对数学抽象, 数学建模, 数学运算核心素养的关注; 体现综合性和创新性. 满分 12 分.

【解析】(1) $f'(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$, 1 分

记 $g(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$, 则 $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$,

所以 $x \in (0, 1)$, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 单调递减;

$x \in (1, +\infty)$, $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 单调递增; 2 分

所以 $g(x)_{\min} = g(1) = 0$, 所以 $g(x) \geq 0$, 即 $f'(x) \geq 0$, 且仅有 $f'(1) = 0$,

所以 $f(x)$ 为 $(0, +\infty)$ 上的增函数. 3 分

(2) (i) 由 (1) 得 $f'(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 1 - a$, $g'(x) = \frac{x-1}{x^2}$,

因为 $x \in (1, +\infty)$, 所以 $g'(x) > 0$, 所以 $f'(x)$ 单调递增,

所以 $f'(x) > f'(1) = 2 - a$, 4 分

① 当 $a \leq 2$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 为递增函数,

所以 $f(x) > f(1) = 0$, 满足题意; 5 分

② 当 $a > 2$ 时, $f'(x) = 2 - a < 0$, $f'(e^a) = 1 + \frac{1}{e^a} > 0$,

又由 $f'(x)$ 单调递增, 所以 $f'(x)$ 有唯一零点 x_0 , 6 分

则 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

所以 $f(x_0) < f(1) = 0$, 不合题意, 舍去.

综上, $a \in (-\infty, 2]$ 7 分

(ii) 经计算: $a_1 = 0.5$, $a_2 = \frac{7}{12} \in (0.5, 0.6)$, $a_3 = \frac{37}{60} \in (0.6, 0.7)$ 8 分

因为 $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$, 所以数列 $\{a_n\}$ 单调递增,

所以, 当 $n=1$ 或 2 时, $0.5 \leq a_n < 0.6$; 当 $n \geq 3$ 时, $a_n \geq a_3 > 0.6$ 9 分

当 $a=2$ 时, 由 (i) 可知, 此时 $f(x) > 0$, 即 $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1} (x > 1)$,

令 $\frac{2(x-1)}{x+1} = \frac{1}{k}$, 则 $x = \frac{2k+1}{2k-1}$, 则有 $\frac{1}{k} < \ln \frac{2k+1}{2k-1}$, 10 分

令 $k = n+1, n+2, \dots, 2n$, 则有

$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} < \ln \frac{2n+3}{2n+1} + \ln \frac{2n+5}{2n+3} + \dots + \ln \frac{4n+1}{4n-1} = \ln \frac{4n+1}{2n+1}$, 11 分

因为 $\ln \frac{4n+1}{2n+1} = \ln \left(2 - \frac{1}{2n+1} \right) < \ln 2 < 0.7$, 所以当 $n \geq 3$ 时, $0.6 < a_n < 0.7$.

所以, 当 $n=1$ 或 2 时, $[10a_n] = 5$; 当 $n \geq 3$ 时, $[10a_n] = 6$ 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线