试卷类型：A

高　一　数　学

2023.7

本试卷共4页．满分150分．考试时间120分钟．

注意事项：

1. 答题前，考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名．
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效．
3. 考试结束，考生必须将试题卷和答题卡一并交回．

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知复数 $z=\frac{i}{1-i}$，则复数 z 的虚部为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}i$　　D. $-\frac{1}{2}i$

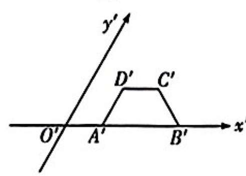
2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,3)$，$\boldsymbol{b}=(3,\lambda)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则实数 λ 的值为

A. 7　　B. 3　　C. -1　　D. -3

3. 在平面直角坐标系 xOy 中，若角 α 的终边经过点 $M(-1,2)$，则 $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=$

A. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　B. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

4. 已知水平放置的平面图形 $ABCD$ 的直观图如图所示，其中 $A'B'//D'C'$，$\angle D'A'B'=45°$，$A'B'=3$，$C'D'=1$，$A'D'=1$，则平面图形 $ABCD$ 的面积为



A. 6　　B. 3

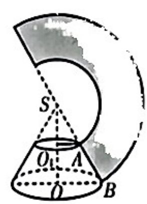
C. 8　　D. 4

5. 若 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，且 $\tan2\alpha=\frac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$，则 $\sin\alpha$ 的值为

A. $\frac{\sqrt{15}}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$

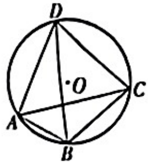
6. 如图，圆台 OO_1 的侧面展开图扇环的圆心角为180°，其中 $SA=2$，$SB=4$，则该圆台的高为



A. 1　　B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$　　D. 4

7. 托勒密是古希腊天文学家、地理学家，托勒密定理就是由其名字命名，该定理指出：圆的内接凸四边形两组对边乘积的和等于两条对角线的乘积. 如图四边形 $ABCD$ 为圆 O 的内接凸四边形，$BD=6$，$BC=2AB$，且 $\triangle ACD$ 为等边三角形，则圆 O 的直径为



A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{21}}{3}$

C. $\frac{2\sqrt{21}}{3}$　　D. $\frac{4\sqrt{21}}{3}$

8. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$，则内角 C 的最大值为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

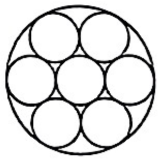
二、多项选择题：本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知复数 $z=a+(a+1)\mathrm{i}(a\in\mathbf{R})$，则

A. 若 $z\in\mathbf{R}$，则 $a=-1$　　B. 若 z 是纯虚数，则 $a=0$

C. 若 $a=1$，则 $\bar{z}=1+2\mathrm{i}$　　D. 若 $a=3$，则 $|z|=5$

10. 某球形巧克力设计了一种圆柱形包装盒，每盒可装 7 个球形巧克力，每盒只装一层，相邻的球形巧克力相切，与包装盒接触的 6 个球形巧克力与圆柱形包装盒侧面及上下底面都相切，如图是平行于底面且过圆柱母线中点的截面，设包装盒的底面半径为 R，球形巧克力的半径为 r，每个球形巧克力的体积为 V_1，包装盒的体积为 V_2，则



A. $R=3r$　　B. $R=6r$　　C. $V_2=9V_1$　　D. $2V_2=27V_1$

11. 已知函数 $f(x)=\tan\left(2\omega x-\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$ 的最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$，则

A. $\omega=2$　　B. $f\left(-\frac{\pi}{12}\right)>f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

C. $f(x)$ 的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{12},0\right)(k\in\mathbf{Z})$　　D. $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递增

12. 东汉末年的数学家赵爽在《周髀算经》中利用一副“弦图”，根据面积关系给出了勾股定理的证明，后人称其为“赵爽弦图”. 如图 1，它由四个全等的直角三角形与一个小正方形拼成的一个大正方形. 我们通过类比得到图 2，它由三个全等的钝角三角形与一个小等边三角形 DEF 拼成的一个大等边三角形 ABC，则

A. 这三个全等的钝角三角形可能是等腰三角形

B. 若 $AB=\sqrt{7}DF$，则 $BD=DE$

C. 若 $AF=3$，$\sin\angle CAF=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，则 $EF=2$

D. 若 $DE=\frac{1}{3}BE$，则三角形 ABC 的面积是三角形 DEF 面积的 19 倍

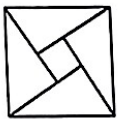


图1

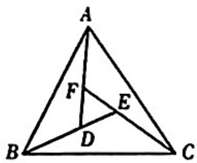


图2

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

13. 请写出一个周期为 π 的偶函数 $f(x)=$________.

14. 已知点 $A(2,1)$，向量 $\overrightarrow{OA}$ 绕原点 O 顺时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到向量 $\overrightarrow{OB}$，则点 B 的坐标为

________.

15. 已知 $\cos\theta+\cos(\theta+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，则 $\sin\theta=$________.

16. 将半径均为 2 的四个球堆成如图所示的“三角垛”，则由球心 A,B,C,D 构成的四面体的外接球的表面积为________，若该三角垛能放入一个正四面体容器内，则该容器棱长的最小值为________.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知 i 是虚数单位，设复数 $z_1=1+\mathrm{i}$，$z_2=m-2\mathrm{i}(m\in\mathbf{R})$.

（1）若 $z_1+z_2=2-\mathrm{i}$，求实数 m 的值；

（2）若 $z_1\cdot z_2$ 在复平面上对应的点位于右半平面（不包括虚轴），求实数 m 的取值范围.

18.（12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，O 为坐标原点，已知点 $A(3,4)$，$B(-2,2)$，且四边形 $OABC$ 是平行四边形.

（1）求点 C 的坐标及 $|\overrightarrow{AC}|$；

（2）若点 P 为直线 OB 上的动点，求 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的最小值.

19.（12 分）

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$\tan B=\frac{\tan C+1}{\tan C-1}$.

（1）求 A；

（2）若 $\cos B=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$b=\sqrt{2}$，求边 c.

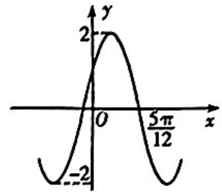
20. (12 分)

函数 $f(x)=A\cos(2x+\varphi)\left(A>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到函数 $g(x)$ 的图象,

若 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,方程 $g^2(x)+(2-m)g(x)+m-3=0$ 存在三个不相等的实数根,求实数 m 的取值范围.

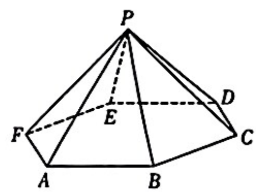


21. (12 分)

如图,在正六棱锥 $P-ABCDEF$ 中,球 O 是其内切球,$AB=2$,$PC=\sqrt{13}$,点 M 是底面 $ABCDEF$ 内一动点(含边界),且 $OM=OP$.

(1) 求正六棱锥 $P-ABCDEF$ 的体积;

(2) 当点 M 在底面 $ABCDEF$ 内运动时,求线段 OM 所形成的曲面与底面 $ABCDEF$ 所围成的几何体的表面积.



22. (12 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对边分别为 a,b,c. 若 $\triangle ABC$ 内部有一个圆心为 P,半径为 $\sqrt{3}$ 米的圆,它沿着 $\triangle ABC$ 的边内侧滚动一周,且始终保持与三角形的至少一条边相切.

(1) 若 $\triangle ABC$ 为边长是 16 米的等边三角形,求圆心 P 经过的路程;

(2) 若用 28 米的材料刚好围成这个三角形,请你设计一种 $\triangle ABC$ 的围成方案,使得圆心 P 经过的路程最大并求出该最大值(若 a,b,c 为正数,则 $a+b+c\geqslant3\sqrt[3]{abc}$,当且仅当 $a=b=c$ 时取等号).