湖北省 2023 届高三 5 月国都省考模拟测试
数学参考答案及评分标准

选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	A	B	C	B	D	A	BD	AD	ACD	AC

填空题：

13. 21　　14. $y=12x-16$　　15. $\frac{\sqrt{33}}{9}$　　16. $\frac{1019}{1000};\frac{8}{9}\times(\frac{3}{4})^n-\frac{10}{9}\times(\frac{3}{5})^n$

解答题：

17.（10 分）解：

（1）在 ΔABC 中由正弦定理有：$\sin A\cdot\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B$.

因为 $\sin B\neq 0$，所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又因为 A 为锐角，即 $A=\frac{\pi}{3}$. …………5 分

（2）设 $\angle ACD=\theta$，在 ΔACD 中，$AD=CD$，即 $\angle CAD=\theta$.

易知 $\angle BAD=\frac{\pi}{3}-\theta$，$\angle ABC=\frac{2\pi}{3}-\theta$.

在 ΔABD 中，由正弦定理有：$\frac{BD}{\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)}=\frac{AD}{\sin(\frac{2\pi}{3}-\theta)}$.

又因为 $AD=2BD$，所以 $2\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)=\sin(\frac{2\pi}{3}-\theta)$.

化简得 $\sin(\theta-\frac{\pi}{6})=0$，因为 $\theta\in(0,\frac{\pi}{3})$，即 $\theta=\frac{\pi}{6}$.

则 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，所以 ΔABC 为直角三角形. …………10 分

18.（12 分）解：

（1）设 $b_n=\frac{a_n}{n}+1$，则 $b_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{n+1}+1$，$b_1=4$.

因为 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{2a_n+n}{n}$，所以 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\frac{a_{n+1}}{n+1}+1}{\frac{a_n}{n}+1}=\frac{\frac{2a_n}{n}+2}{\frac{a_n}{n}+1}=2$.

即 $\{b_n\}$ 是以 4 为首项，2 为公比的等比数列.

则数列 $\left\{\frac{a_n}{n}+1\right\}$ 是等比数列. …………6 分

（2）由（1）知 $b_n=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$，则 $a_n=n\cdot 2^{n+1}-n$，即 $c_n=n\cdot 2^{n+1}$.

则 $T_n=1\times 2^2+2\times 2^3+\cdots\cdots+n\times 2^{n+1}$.

$2T_n=\qquad 2\times 2^2+\cdots\cdots+(n-1)\times 2^{n+1}+n\times 2^{n+2}$.

两式相减得：$-T_n=2^2+2^3+\cdots\cdots+2^{n+1}-n\times 2^{n+2}$.

所以 $T_n=(n-1)2^{n+2}+4$. …………12 分

19.（12 分）解：

（1）在ΔABD中，$\angle BAD=60^\circ, AB=2$，$O$是$AD$的中点，即$OB=\sqrt{3}$.

在ΔPAD 中，$PO=\sqrt{3}$，$PO\perp AD$.

ΔPOB 中，$PB=\sqrt{6}, PO^2+OB^2=PB^2$,所以$PO\perp OB$.

又因为$PO\perp AD$，$OB\cap AD=O$.

OB, AD均在平面$ABCD$中，所以$PO\perp$平面$ABCD$.

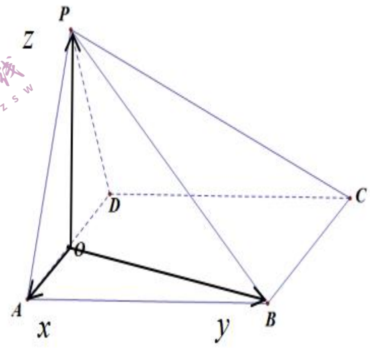
$PO\subset$平面PBO，所以平面$PBO\perp$平面$ABCD$. …………6 分

（2）由（1）知$PO\perp$平面$ABCD$.

在ΔABD中，$\angle BAD=60^\circ, AB=2$，$O$是$AD$的中点，即$BO\perp AD$.

以O为原点，OA, OB, OP所在直线分别为x轴、y轴、z轴，

建立如图所示的空间直角坐标系.



则$P(0,0,\sqrt{3}), B(0,\sqrt{3},0), C(-2,\sqrt{3},0)$.

所以$\overrightarrow{BC}=(-2,0,0), \overrightarrow{PB}=(0,\sqrt{3},-\sqrt{3})$.

设平面OPC的法向量为$\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，由$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{OP}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{OC}=0\end{cases}$.

得$\begin{cases}\sqrt{3}z_1=0\\ -2x_1+\sqrt{3}y_1=0\end{cases}$，取$\vec{m}=(\sqrt{3},2,0)$.

设平面PCB的法向量为$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}\sqrt{3}y_2-\sqrt{3}z_2=0\\ -2x_2=0\end{cases}$，取$\vec{n}=(0,1,1)$.

所以$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{14}}{7}$.

所以二面角$O-PC-B$的平面角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{14}}{7}$. …………12 分

20.（12 分）解：

（1）一件手工艺品质量为二级品的概率为$C_3^2\times(\dfrac{2}{3})^2\times(1-\dfrac{2}{3})=\dfrac{4}{9}$. …………4 分

（2）Y可能取值为$100,70,20,-10$.

$P(Y=100)=(\dfrac{2}{3})^3=\dfrac{8}{27}$; $P(Y=70)=C_3^2\times(\dfrac{2}{3})^2\times(1-\dfrac{2}{3})=\dfrac{4}{9}$.

$P(Y=20)=C_3^1\times\dfrac{2}{3}\times(1-\dfrac{2}{3})^2=\dfrac{2}{9}$; $P(Y=-10)=(1-\dfrac{2}{3})^3=\dfrac{1}{27}$.

则Y的分布列为：

Y	100	70	20	-10
P	$\dfrac{8}{27}$	$\dfrac{4}{9}$	$\dfrac{2}{9}$	$\dfrac{1}{27}$

期望$E(Y)=100\times\dfrac{8}{27}+70\times\dfrac{4}{9}+20\times\dfrac{2}{9}-10\times\dfrac{1}{27}=\dfrac{1750}{27}$.

所以 1000 件产品的平均利润为$1000E(Y)=\dfrac{1750000}{27}$. …………12 分

21.（12 分）解：

（1）由题意知，双曲线焦点在 x 轴上，故设双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$.

将 A 、B 两点坐标代入双曲线方程得 $a=2$，$\dfrac{(-14)^2}{a^2}-\dfrac{24^2}{b^2}=1(a,b>0)$.

所以 $a=2,b=2\sqrt{3}$，即双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$. …………4 分

（2）直线 DG 过定点 $A(-2,0)$，下面给出证明.

D,G,A 三点共线 $\Leftrightarrow k_{AD}=k_{AG}$

设点 $D(x_1,y_1),E(x_2,y_2)$，直线 DE 方程为 $y=k(x+2)+3$.

由题意知，直线 AB 的方程为 $y=-2x-4$.

点 F 为线段 EG 的中点，从而 $F(x_2,-2x_2-4)$，$G(x_2,-4x_2-8-y_2)$.

$k_{AD}=\dfrac{y_1}{x_1+2},k_{AG}=\dfrac{-4x_2-8-y_2}{x_2+2}$，若 $k_{AD}=k_{AG}\Leftrightarrow\dfrac{y_1}{x_1+2}=\dfrac{-4x_2-8-y_2}{x_2+2}$.

化简得 $y_1(x_2+2)+y_2(x_1+2)+4(x_1+2)(x_2+2)=0$ ......（1）

又 $y_1=k(x_1+2)+3,y_2=k(x_2+2)+3$，代入（1）式得.

即证 $(2k+4)x_1x_2+(4k+11)(x_1+x_2)+(8k+28)=0$ ......（2）

联立 $\begin{cases}y=k(x+2)+3\\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1\end{cases}$，化简得 $(3-k^2)x^2-2k(2k+3)x-(2k+3)^2-12=0$.

则 $x_1+x_2=\dfrac{2k(2k+3)}{3-k^2},x_1x_2=\dfrac{-12-(2k+3)^2}{3-k^2}$.

代入（2）式左边得

$$(2k+4)\cdot\frac{-12-(2k+3)^2}{3-k^2}+(4k+11)\cdot\frac{2k(2k+3)}{3-k^2}+8k+28=0.$$

由于 $(2k+4)\left[-12-(2k+3)^2\right]=-8k^3-40k^2-90k-84$.

$(4k+11)(4k^2+6k)=16k^3+68k^2+66k$.

$(3-k^2)(8k+28)=-8k^3-28k^2+24k+84$.

从而（2）式左边等于 0 成立，直线 DG 过定点 $A(-2,0)$. …………12 分

22.（12 分）解：

（1）由题意知，$g(x)=f^{'}(x)=x-\frac{1}{x}-a\ln x$，$g^{'}(x)=\frac{x^2-ax+1}{x^2}$，$x>0$.

记 $h(x)=x^2-ax+1, x>0$，则 $\Delta=a^2-4$.

当 $\Delta\le 0$ 即 $-2\le a\le 2$ 时，$h(x)\ge 0$，$g^{'}(x)\ge 0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

当 $\Delta>0$ 即 $a<-2$ 或 $a>2$ 时，设 $h(x)=0$ 的解为 $x_1^{'},x_2^{'}(x_1^{'}<x_2^{'})$.

若 $a<-2$，则由 $x_1^{'}+x_2^{'}=a, x_1^{'}x_2^{'}=1$ 得，$x_1^{'}<x_2^{'}<0$.

因为 $x>0$，所以 $h(x)>0$，$g^{'}(x)\ge 0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

若 $a>2$，则由 $x_1^{'}+x_2^{'}=a, x_1^{'}x_2^{'}=1$ 得，$0<x_1^{'}<1<x_2^{'}$.

此时 $x_1^{'}=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$，$x_2^{'}=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$.

$g(x)$ 在 $\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$ 递增，在 $\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$ 递减，在 $\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$ 递增.

综上所述，当 $a\le 2$ 时，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增；

当 $a>2$ 时，$g(x)$ 在 $\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$ 单调递增，

在 $\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$ 单调递减. …………4 分

（2）（i）$f^{'}(x)=x-\frac{1}{x}-a\ln x$，$f(x)$ 有三个不同的极值点等价于 $f^{'}(x)=0$ 有三个不同根.

显然，$x_2=1$ 是方程的一个根.则问题转化为当 $x\ne 1$ 时，方程 $a=\frac{x-\frac{1}{x}}{\ln x}$ 有两个不等的根.

令 $h(x)=\frac{x-\frac{1}{x}}{\ln x}$，则 $h'(x)=\frac{(x^2+1)(\frac{1}{2}\ln x^2-\frac{x^2-1}{x^2+1})}{x^2\ln^2 x}$.

构造函数 $u(x)=\frac{1}{2}\ln x^2-\frac{x^2-1}{x^2+1}, x>0$ 且 $x\ne 1$，令 $t=x^2$，则 $v(t)=\frac{1}{2}\ln t-\frac{t-1}{t+1}$.

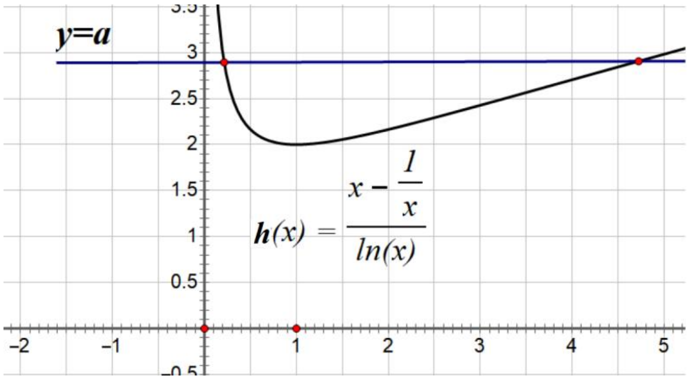
$v^{'}(t)=\frac{1}{2t}-\frac{2}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{2t(t+1)^2}$,即 $v(t)$ 在 $(0,1),(1,+\infty)$ 单调递增.

又因为 $v(1)=0$.所以当 $t>1$ 时，$v(t)>0$；当 $0<t<1$ 时，$v(t)<0$.

易知：当 $x>1$ 时，$\frac{1}{2}\ln x^2>\frac{x^2-1}{x^2+1}$，则 $h(x)$ 单调递增.

当$0<x<1$时，$\frac{1}{2}\ln x^2<\frac{x^2-1}{x^2+1}$，则$h(x)$单调递减.

当$x\to 1$时，$h(x)\to 2$，则$h(x)$的图象如下图所示：



为使$y=a$与$h(x)$有两个交点，则a的取值范围是$a>2$. …………8 分

（ii）令$f'(x)=x-\frac{1}{x}-a\ln x=0$.

则易知：若x_0是方程$f'(x)=0$的根，则$\frac{1}{x_0}$也是方程$f'(x)=0$的根，即有$x_1x_3=1$.

欲证$f(x_3)<f(x_1)$，只需证$f(x_1)-f(\frac{1}{x_1})>0$，令$\varphi(x)=f(x)-f(\frac{1}{x})\ (0<x<1)$.

由（i）可知，$a=\frac{x_1-\frac{1}{x_1}}{\ln x_1}$.

所以$f(x_1)=\frac{1}{2}x_1^2+ax_1-(ax_1+1)\ln x_1=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{x_1^2-1}{\ln x_1}-(\frac{x_1^2-1}{\ln x_1}+1)\ln x_1$.

$\varphi'(x)=[f(x)]'-[f(\frac{1}{x})]'$，$f'(x)=-x-\frac{1}{x}+\frac{2x\ln x-x+\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$.

$[f(\frac{1}{x})]'=\frac{-(x^2+1)(\ln x)^2-2\ln x+x^2-1}{x^3(\ln x)^2}$.

即$\varphi'(x)=\frac{2(x^4-1)\ln x-(x^2-1)^2-(x^2+1)^2(\ln x)^2}{x^3(\ln x)^2}=\frac{-[(x^2+1)\ln x-(x^2-1)]^2}{x^3(\ln x)^2}$.

因为$0<x<1$，所以$\varphi'(x)\le 0$，即$\varphi(x)$在$(0,1)$上单调递减.

又因为$\varphi(1)=0$，所以$\varphi(x)>0$在$(0,1)$上恒成立.

即$f(x)-f(\frac{1}{x})>0$在$(0,1)$上恒成立.证得$f(x_1)-f(\frac{1}{x_1})>0$恒成立，即$f(x_3)<f(x_1)$.

…………12 分

湖北省 2023 届高三高考备考模拟测试（国都省考）

数学试卷切分方案

选择题

1.（5 分）	2.（5 分）	3.（5 分）	4.（5 分）
5.（5 分）	6.（5 分）	7.（5 分）	8.（5 分）
9.（5 分）部分选对 2 分		10.（5 分）部分选对 2 分	
11.（5 分）部分选对 2 分		12.（5 分）部分选对 2 分	

填空题

13.（5 分）	14.（5 分）	15.（5 分）	16.（0 分，2 分，3 分，5 分）

解答题

17.（10 分）

（1）（5 分）	□
（2）（5 分）	□

18.（12 分）

（1）（6 分）	□
（2）（6 分）	□

19.（12 分）

（1）（6 分）	□
（2）（6 分）	□

20.（12 分）

（1）（4 分）	□
（2）（8 分）	□

21.（12 分）

（1）（4 分）	□
（2）（8 分）	□

22.（12 分）

（1）（4 分）	□
（2）（i）（4 分）	
（2）（ii）（4 分）	□