

江苏省新高考基地学校 2022 届高三第一学期期中质量监测

(第一次大联考)

数 学 试 卷

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号写在答题卡上.
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号. 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | x(x-2) \leq 0\}$, $B = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$, 则 $A \cup B =$

- A. $[-1, 0]$ B. $[0, 1]$ C. $[-1, 2]$ D. $[1, 2]$

【答案】A

【解析】 $A = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$, $A \cup B = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$, 选 C.

2. 已知复数 z 满足 $(z-3)(1+i) = 1-i$, $|z| =$

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{10}$

【答案】D

【解析】 $z-3 = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i$, $z = 3-i$, $|z| = \sqrt{10}$, 选 D.

3. 已知直线 $l_1: (3+m)x + 4y = 5-3m$, $l_2: 2x + (5+m)y = 8$, 则 “ $l_1 \parallel l_2$ ” 是 “ $m = -7$ ” 的

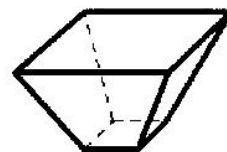
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分又不必要条件

【答案】C

【解析】 $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} (3+m)(5+m) = 8 \\ (3+m)(-8) \neq 2(3m-5) \end{cases} \Leftrightarrow m = -7$,

$\therefore$ 充要条件, 选 C.

4. 我国古代《九章算术》将上下两个平行平面为矩形的六面体称为刍童。如图池盆几何体是一个刍童，其中上下底面为正方形边长分别为 6 和 2，侧面是全等的等腰梯形梯形的高为 $2\sqrt{2}$ ，若盆中积水深为池盆高度的一半，则该盆中积水的体积为

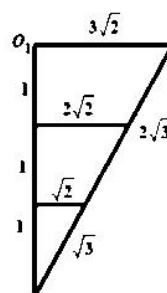
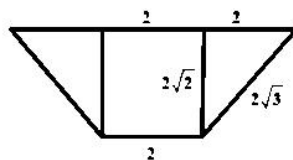
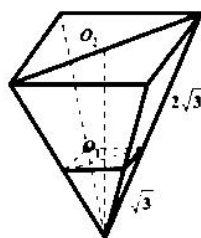


- A. $\frac{14\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{28}{3}$ C. $\frac{28\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{52}{3}$

【答案】B

【解析】法一：

梯形的腰为 $2\sqrt{3}$ ，延长梯形的腰交于 O 点，如图，



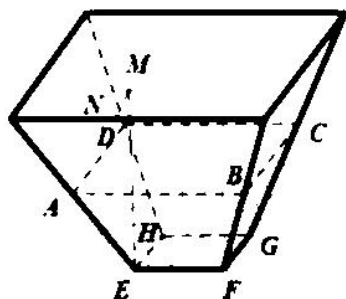
$$\frac{x}{x+2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}, \therefore x = \sqrt{3},$$

$$\therefore OO_1 = 1, h = 2, \frac{h}{2} = 1,$$

$$V = \frac{1}{3} \times 4 \times 4 \times 2 - \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times 1 = \frac{28}{3}, \text{选 B.}$$

法二：

过 E 作 $EM \perp$ 上底面于点 M ，过 M 作 $MN \perp$ 上底面棱于 N 点，连接 EN ，



则 $EN = 2\sqrt{2} \Rightarrow$ 四棱台的高 $h = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 2^2} = 2$,

再水面的正方形的长为 $\frac{6+2}{2}=4$,

$$\therefore V_{\text{水}} = \frac{1}{3}(S_{\text{上}} + S_{\text{下}} + \sqrt{S_{\text{上}}S_{\text{下}}})h = \frac{1}{3}(16 + 4 + 8) \times 1 = \frac{28}{3}, \text{选 B.}$$

5. 关于函数 $y = \sin(2x + \varphi)$ ($\varphi \in \mathbf{R}$) 有如下四个命题:

甲: 该函数在 $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$ 上单调递增;

乙: 该函数图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到一个奇函数;

丙: 该函数图象的一条对称轴方程为 $x = -\frac{5\pi}{6}$;

丁: 该函数图象的一个对称中心为 $(\frac{\pi}{12}, 0)$.

如果只有一个假命题, 则该命题是

- A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

【答案】D

【解析】乙真: $f\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{12}\right) + \varphi\right] = \sin\left[2x + \varphi - \frac{\pi}{6}\right]$ 为奇函数,

$$\varphi - \frac{\pi}{6} = k\pi, \text{ 即 } \varphi = \frac{\pi}{6} + k\pi.$$

$$\text{丙真: } 2 \times \left(-\frac{5}{6}\pi\right) + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ 即 } \varphi = \frac{13}{6}\pi + k\pi,$$

$$\text{丁真: } 2 \times \frac{\pi}{12} + \varphi = k\pi, \text{ 即 } \varphi = -\frac{\pi}{6} + k\pi,$$

$\therefore$ 丁是唯一假命题.

$$\text{此时 } \varphi = \frac{\pi}{6}, f(x) \text{ 在 } \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) \nearrow,$$

$\therefore$ 选 D.

6. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x} + 2$, 则关于 x 的不等式 $f(2x-1) + f(2x) > 4$ 的解集为

- A. $(0, \frac{1}{4})$ B. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ C. $(-\infty, \frac{1}{4})$ D. $(\frac{1}{4}, +\infty)$

【答案】A

【解析】令 $g(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$, $g(1-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = -g(x)$,

$\therefore g(x)$ 为奇函数, 定义域 $(-1, 1)$, $g(x) = \ln \frac{-1-x+2}{x+1} = \ln \left(\frac{2}{x+1} - 1 \right)$,

$\therefore g(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上, $f(2x-1) + f(2x) > 4$,

则 $g(2x-1) + 2 + g(2x) + 2 > 4$, $\therefore g(2x-1) + g(2x) > 0$,

$\therefore g(2x-1) > -g(2x)$, 即 $g(2x-1) > g(-2x)$,

$\therefore \begin{cases} -1 < 2x-1 < 1 \\ -1 < -2x < 1 \\ 2x-1 < -2x \end{cases}$, $\therefore 0 < x < \frac{1}{4}$, 选 A.

7. 若 $\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 则 $\cos(\frac{2\pi}{3} - 2\alpha) =$

A. $-\frac{8}{9}$

B. $\frac{8}{9}$

C. $-\frac{17}{18}$

D. $\frac{17}{18}$

【答案】A

【解析】 $2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{6}$

$\cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2\alpha\right) = \cos\left[\frac{2}{3}\pi - 2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \cos\left[\pi - 2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\right]$

$= -\cos 2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = -\left[1 - 2\sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\right]$

$= -\left[1 - 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2\right] = -\left(1 - 2 \times \frac{1}{18}\right) = -\frac{8}{9}$, 选 A.

8. 设 $k > 0$, 若不等式 $k\log_3(kx) - 3^x \leq 0$ 在 $x > 0$ 时恒成立, 则 k 的最大值为

A. e

B. $e\ln 3$

C. $\log_3 e$

D. 3

【答案】B

【解析】 $k \cdot \log_3 kx \leq 3^x$, $kx \cdot \log_3 kx \leq x \cdot 3^x$, 即 $(\log_3 kx)3^{\log_3 kx} \leq x \cdot 3^x$

$f(x) = x \cdot 3^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上 $\nearrow$, $\therefore f(\log_3 kx) \leq f(x)$ 可知 $\log_3 kx \leq x$, $\therefore kx \leq 3^x$,

$\therefore k \leq \frac{3^x}{x}$, 令 $g(x) = \frac{3^x}{x}$,

$$g'(x) = \frac{x \cdot 3^x \ln 3 - 3^x}{x^2} = \frac{3^x(x \ln 3 - 1)}{x^2} = 0, x = \frac{1}{\ln 3},$$

$\therefore g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{\ln 3}\right)$ 上 $\searrow$, $\left(\frac{1}{\ln 3}, +\infty\right)$ 上 $\nearrow$,

$$\therefore g(x)_{\min} = g\left(\frac{1}{\ln 3}\right) = \frac{3^{\frac{1}{\ln 3}}}{\frac{1}{\ln 3}} = \frac{3^{\log_3 e}}{\frac{1}{\ln 3}} = e \ln 3, \therefore k \leq e \ln 3, \text{选 B.}$$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, 且 $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} < 0$, 则

- A. $x - y > 0$ B. $\sin x - \sin y > 0$ C. $2^x - 2^y > 0$ D. $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} > 2$

【答案】ACD

【解析】 $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} < 0$, $\therefore y < x < 0$, $\therefore x - y > 0$, A 对.

取 $x = -2\pi, y = -4\pi$ 满足 $y < x < 0$, 但此时 $\sin x = \sin y$, B 错.

$x > y$, $\therefore 2^x > 2^y$, $\therefore 2^x - 2^y > 0$, C 对.

$y < x < 0$, $\therefore \frac{x}{y} > 0$, $\frac{y}{x} > 0$, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2$, D 对, 选 ACD.

10. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 a_n 与 S_n 的等差中项为常数 t , 则

- A. 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列 B. $a_{n+2}a_n \geq 0$
C. 数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是递增数列 D. 当且仅当 $t < 0$ 时, 数列 $\{(n+1)a_n\}$ 是递增数列

【答案】BD

【解析】 $2t = a_n + S_n$, $n=1$ 时, $a_1 = t$,

当 $t=0$ 时, $\{a_n\}$ 就不是等比数列, A 错.

$n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2t - a_n - (2t - a_{n-1})$, $\therefore 2a_n = a_{n-1}$,

$t = 0$ 时, $a_n = 0$, $a_{n+2}a_n \geq 0$;

$t \neq 0$ 时, $\{a_n\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列,

$a_{n+2}a_n = a_n \cdot \frac{1}{4}a_n = \frac{1}{4}a_n^2 \geq 0$, B 对.

$t \neq 0$ 时, $a_n = t \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{t} \cdot 2^{n-1}$,

$\frac{1}{t} > 0$ 时, $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是递增数列, $\frac{1}{t} < 0$ 时, $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是递减数列, C 错.

此时应知答案为 BD.

$\{(n+1)a_n\}$ 是递增数列, $t \neq 0$, $a_n = t \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

$$\begin{aligned} (n+2)a_{n+1} - (n+1)a_n &= (n+2)t \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - (n+1)t \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= t \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n (n+2-2n-2) = t \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n (-n) > 0. \end{aligned}$$

$\therefore t < 0$, D 对, 选 BD.

11. 若直线 $y = \frac{1}{2}x + b (b \in \mathbf{R})$ 是曲线 $y = f(x)$ 的切线, 则曲线 $y = f(x)$ 可以是

- A. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 8$ B. $f(x) = \tan x$ C. $f(x) = xe^x$ D. $f(x) = \ln \frac{1}{2x+1}$

【答案】AC

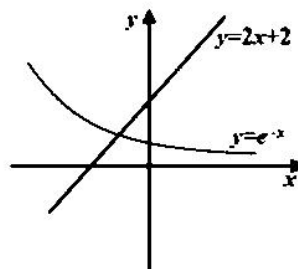
【解析】A. $f'(x) = 3x^2 + 4x = \frac{1}{2}$, 有解, A 正确.

B. $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{2}$, 无解, B 错.

C. $f'(x) = (x+1)e^x = \frac{1}{2}$, 即 $2x+2 = e^{-x}$, 有解, C 正确.

D. $f'(x) = -\frac{2}{2x+1} = -\frac{1}{2}$ 无解, D 错误.

选 AC.



12. 设 $m \in \mathbf{R}$, 直线 $mx - y - 3m + 1 = 0$ 与直线 $x + my - 3m - 1 = 0$ 相交于点 $P(x, y)$, 线段 AB 是圆 $C: (x+2)^2 + (y+1)^2 = 4$ 的一条动弦, Q 为弦 AB 的中点, $|AB| = 2\sqrt{3}$, 下列说法正确的是

- A. 点 P 在定圆 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$ B. 点 P 在圆 C 外
C. 线段 PQ 长的最大值为 $6 + \sqrt{2}$ D. $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最小值为 $15 - 8\sqrt{2}$

【答案】BCD

【解析】直线 $mx - y - 3m + 1 = 0$ 过定点 $M(3, 1)$, 直线 $x + my - 3m - 1 = 0$ 过定点 $N(1, 3)$.

已知两直线互相垂直, 交点 P 为垂足, 则 P 在以 MN 为直径的圆上,

圆: $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$, 设为圆 D , A 错.

$CD = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 > 2 + \sqrt{2}$, $\therefore$ 圆 C 与圆 D 没有公共点,

$\therefore P$ 在圆 C 外, B 对.

$\therefore P$ 在圆 C 外, B 对.

$AB = 2\sqrt{3}$, $\therefore CQ = 1$, $\therefore Q$ 点轨迹: $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 1$.

$(PQ)_{\max} = CD + \sqrt{2} + 1 = 6 + \sqrt{2}$, C 对.

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PQ}^2 - \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}^2 \geq (CD - \sqrt{2} - 1)^2 - 3 = 15 - 8\sqrt{2}$, D 对.

选 BCD.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量 a, b 满足 $|a|=2$, $b=(1, 2\sqrt{2})$, $|a+b|=\sqrt{19}$, 则 a, b 的夹角为_____.

【答案】 $\frac{\pi}{3}$

【解析】 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}$, $\therefore \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 19$,

$\therefore 4 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 9 = 19$, $\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 3$,

$\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{3}{2 \times 3} = \frac{1}{2}$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \in [0, \pi]$, $\therefore \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\pi}{3}$,

$\therefore \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为 $\frac{\pi}{3}$.

14. 写出一个同时具有下列性质①②的函数 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

① $f(x) = -f(1+x)$; ② $f'(x)$ 是偶函数.

【答案】 $\sin \pi x$

【解析】 $f(x) = -f(1+x)$, 则 $f(x+2) = -f(x+1) = -(-f(x)) = f(x)$, $T = 2$,

$f(x) = \sin \pi x$ 满足条件, 答案: $\sin \pi x$.

15. 某火电厂对其使用的燃煤进行精细化碳排放污染物控制, 产生的废气经过严格过滤后排放, 已知过滤过程中废气的剩余污染物数量 P (单位: mg/L) 与过滤时间 t (单位: 小时) 之间的关系式为 $P = P_0 e^{-kt}$ 其中 P_0 为废气中原污染物总量, k 为常数. 若过滤开始后经过 3 个小时废气中的污染物被过滤掉了原污染物总量的 50%, 那么要使废气中剩余污染物含量不超过 5%, 过滤开始后需要经过 n 小时, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$, 正整数 n 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(参考数据: $\ln 2 \approx 0.693$, $\ln 5 \approx 1.609$)

【答案】 $\frac{1}{3} \ln 2$; 13

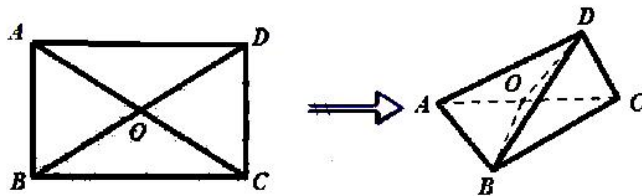
【解析】 $t = 3$ 时, $P = 50\% P_0$, $\therefore 50\% P_0 = P_0 e^{-3k}$, $\therefore k = \frac{1}{3} \ln 2$,

$P \leq 5\% P_0$, $\therefore P_0 e^{-kt} \leq 5\% P_0$, $\therefore e^{-kt} \leq \frac{1}{20}$, $\therefore kt \geq \ln 20$

$t \geq \frac{\ln 20}{\frac{\ln 2}{3}} = \frac{3 \ln 20}{\ln 2} = \frac{3(2 \ln 2 + \ln 5)}{\ln 2} = 6 + \frac{3 \ln 5}{\ln 2} \approx 12.97$,

$\therefore n_{\min} = 13$.

16. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, $AD = x$, AC 与 BD 交于点 O , 将 $\triangle ACD$ 沿直线 AC 翻折, 形成三棱锥 $D-ABC$, 若在翻折过程中存在某个位置, 使得 $OB \perp AD$, 则 x 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $(0, 2\sqrt{3})$

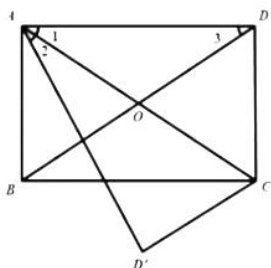
【解析】法一：

考察临界位置.

当 $\triangle ACD$ 完全落在平面 ABC 内时, 若 $AD' \perp OB$, 此时 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$,

$\therefore 3\angle 3 = 90^\circ$, $\angle 3 = 30^\circ$, 此时 $AD = 2\sqrt{3}$.

$\therefore$ 能形成三棱锥, $\therefore x$ 的取值范围为 $(0, 2\sqrt{3})$.



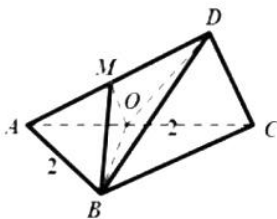
法二：

过 O 作 $OM \perp AD$ 于点 M , 连接 BM ,

则由 $OB \perp AD$, $OM \perp AD$,

$OB \cap OM = O$, $\therefore AD \perp$ 平面 BOM , $\therefore AD \perp BM$,

$\therefore M$ 为 AD 中点, $\therefore AB = BD = 2$,



$$\therefore BM = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}, OM = 1, OB = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2},$$

$$\text{由 } \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} + 1 > \frac{\sqrt{4+x^2}}{2} \Rightarrow 0 < x < 2\sqrt{3}, x \text{ 取值范围为 } (0, 2\sqrt{3}).$$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n + a_{n+1} = 4n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_1 = 1$, $b_{n+1} = \begin{cases} a_n, & n \text{ 为奇数,} \\ -b_n + 2^n, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$ 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n} .

【解析】

(1) 法一：

$$a_n + a_{n+1} = 4n \quad ①, \quad a_{n+1} + a_{n+2} = 4(n+1) \quad ②$$

$$② - ① \Rightarrow a_{n+2} - a_n = 4, \text{ 设 } \{a_n\} \text{ 公差为 } d, \therefore 2d = 4, d = 2,$$

$$\text{而 } a_1 + a_1 + d = 4 \Rightarrow a_1 = 1, \therefore a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1.$$

法二：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，

$$\text{由 } a_n + a_{n+1} = 4n, \text{ 可得 } a_1 + a_2 = 4, a_2 + a_3 = 8, \text{ 所以 } d = 2, a_1 = 1,$$

$$\text{所以 } \{a_n\} \text{ 的通项公式为 } a_n = 2n-1.$$

(2) 法一：

$$b_{n+1} = \begin{cases} 2n-1, & n \text{ 为奇数} \\ -b_n + 2^n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

$$n \text{ 为偶数时, } b_{n+1} = -b_n + 2^n = -b_{n-1-1} + 2^n = -[2(n-1)-1] + 2^n = 2^n - 2n + 3$$

$$\therefore \text{当 } n \text{ 为奇数且 } n \geq 3 \text{ 时, } b_n = 2^{n-1} - 2n + 5,$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时, } b_n = 2n-3$$

$$\therefore S_{2n} = (b_1 + b_3 + \cdots + b_{2n-1}) + (b_2 + b_4 + \cdots + b_{2n})$$

$$= (2^0 + 3 + 2^2 - 1 + \cdots + 2^{2n-2} - 4n + 7) + (1 + 5 + \cdots + 4n - 3) - 3$$

$$= \frac{1(1-4^n)}{1-4} + \frac{(3+7-4n) \cdot n}{2} + \frac{(4n-2) \cdot n}{2} - 3$$

$$= \frac{4^n - 1}{3} + 5n - 2n^2 + 2n^2 - n - 3 = \frac{4^n - 1}{3} + 4n - 3.$$

法二：

$$\text{当 } n \text{ 为奇数时, } b_{n+1} = a_n = 2n-1, \text{ 当 } n \text{ 为偶数时, } b_n + b_{n+1} = 2^n,$$

$$\text{所以, } S_{2n} = b_1 + (b_2 + b_3) + (b_4 + b_5) + (b_6 + b_7) + \cdots + (b_{2n-2} + b_{2n-1}) + b_{2n}$$

$$= 1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + \cdots + 2^{2n-2} + 4n - 3 = \frac{1-2^{2n}}{1-4} + 4n - 3 = \frac{2^{2n} - 10}{3} + 4n.$$

18. (12分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且满足 $(a+2b)\cos C + c\cos A = 0$.

(1)求角 C 的大小;

(2)设 AB 边上的角平分线 CD 长为2, 求 $\triangle ABC$ 的面积的最小值.

【解析】

(1) 由 $(a+2b)\cos C + c\cos A = 0$ 及正弦定理,

可得 $(\sin A + 2\sin B)\cos C + \sin C\cos A = 0$,

即 $\sin A\cos C + \cos A\sin C = -2\sin B\cos C$,

即 $\sin(A+C) = -2\sin B\cos C$,

在 $\triangle ABC$ 中, $A+B+C = \pi$, 所以 $\sin(A+C) = \sin(\pi-B) = \sin B$,

即 $\sin B = -2\cos C\sin B$.

因为 $0 < B < \pi$, 所以 $\sin B \neq 0$, 所以 $\cos C = -\frac{1}{2}$.

因为 $0 < C < \pi$, 所以 $C = \frac{2\pi}{3}$.

(2) 由 $S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD} = S_{\triangle ABC}$, 得 $\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b = \frac{\sqrt{3}}{4}ab$.

所以 $a+b = \frac{1}{2}ab \geq 2\sqrt{ab}$, 即 $ab \geq 16$, 当且仅当 $a=b$ 取等号.

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}ab \geq 4\sqrt{3}$, 即 $\triangle ABC$ 的面积的最小值是 $4\sqrt{3}$.

19. (12分)

已知函数 $f(x) = 1 - \frac{a}{5^x + 1}$ 为奇函数.

(1)求实数 a 的值;

(2)若存在 $m \in [-1, 1]$, 使得不等式 $f(x^2) + f(mx-2) \leq 2-x^2-mx$ 成立, 求 x 的取值范围.

【解析】

法一:

(1) $\because f(x)$ 是奇函数, $\therefore f(0) = 1 - \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow a = 2$.

$$(2) f(x^2) + f(mx-2) \leq 2 - x^2 - mx \Rightarrow f(x^2) + x^2 \leq f(2-mx) + 2 - mx$$

$f(x) = 1 - \frac{2}{5^x + 1}$, 易知 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上 $\nearrow$, $\because f(x)$ 为奇函数, $\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上 $\nearrow$,

构造 $F(x) = f(x) + x$, 易知 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上 $\nearrow$ 且 $F(x^2) < F(2-mx)$

$\therefore x^2 < 2 - mx$, $\because$ 存在 $m \in [-1, 1]$ 使 $g(m) = mx + x^2 - 2 \leq 0$ 成立,

故 $g(-1) < 0$ 或 $g(1) \leq 0 \Rightarrow -x + x^2 - 2 \leq 0$ 或 $x + x^2 - 2 \leq 0$,

解得: $-2 \leq x \leq 2$, 故 x 的取值范围为 $[-2, 2]$.

法二:

(1) 因为函数 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(-x) = -f(x)$,

$$\text{所以 } 1 - \frac{a}{5^{-x} + 1} = \frac{a}{5^x + 1} - 1,$$

$$\text{所以 } \frac{a \cdot 5^x}{5^x + 1} + \frac{a}{5^x + 1} = 2, \text{ 即 } a = 2.$$

(2) 因为函数 $f(x)$ 为奇函数,

$$\text{所以 } f(x^2) + x^2 \leq -f(mx-2) + 2 - mx = f(2-mx) + 2 - mx,$$

$$\text{令 } g(x) = f(x) + x,$$

$$\text{则 } g'(x) = f'(x) + 1 = \frac{2 \ln 5}{(5^x + 1)^2} + 1 > 0,$$

所以 $g(x) = f(x) + x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, 所以 $x^2 \leq 2 - mx$ 在 $m \in [-1, 1]$ 上有解,

$$\text{令 } h(m) = mx + x^2 - 2, \quad m \in [-1, 1],$$

则 $h(m) = mx + x^2 - 2$ 在 $[-1, 1]$ 上是单调函数,

$$\text{所以 } h(1) = x + x^2 - 2 \leq 0, \text{ 或 } h(-1) = -x + x^2 - 2 \leq 0,$$

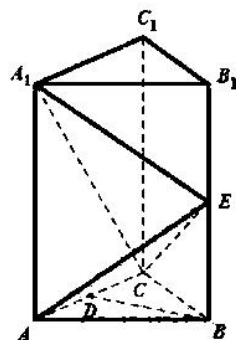
解得 $-2 \leq x \leq 2$, 即 x 的取值范围为 $[-2, 2]$.

20. (12分)

如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AA_1=3$ ， $AB=2$ ， D ， E 分别是 AC ， BB_1 的中点。

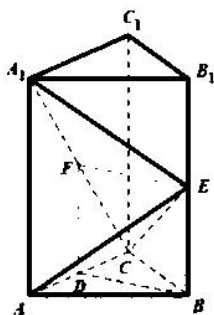
(1)证明： $BD \parallel$ 平面 A_1CE ；

(2)求二面角 $A-EA_1-C$ 的余弦值。



【解析】

(1) 证明：取 A_1C 的中点 F ，连接 DF ， EF ，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，



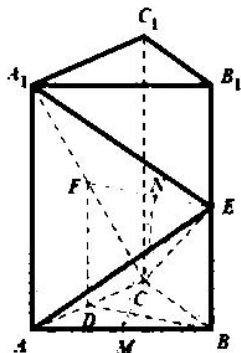
则由 D, E 分别为 AC, BB_1 的中点知 $DF \parallel \frac{1}{2} A_1A \parallel \frac{1}{2} BB_1 \Rightarrow DF \parallel BE$ ，

$\therefore$ 四边形 $BDFE$ 为平行四边形， $\therefore BD \parallel EF$ ，

$\because BD \not\subset$ 平面 A_1CE ， $EF \subset$ 平面 A_1CE ， $\therefore BD \parallel$ 平面 A_1CE 。

(2)

取 AB 中点 M ，连接 CM ，则 $CM \perp$ 平面 EA_1A ，过 M 作 $MN \perp A_1E$ 于点 N ，连接 CN ，



则 $\angle CNM$ 即为所求二面角, $CM = \sqrt{3}$, $A_1E = CE = \frac{5}{2}$, $A_1C = \sqrt{13}$,

在 $\triangle A_1CE$ 中, 由面积法 $\Rightarrow \frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times \sqrt{3} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} CN \Rightarrow CN = \frac{2\sqrt{39}}{5}$,

$$\therefore \sin \theta = \sqrt{3} \cdot \frac{5}{2\sqrt{39}} = \frac{5}{2\sqrt{13}}, \cos \theta = \frac{3\sqrt{39}}{26}.$$

21. (12分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知 $A(1, 0)$, $B(4, 0)$, 点 M 满足 $\frac{|MA|}{|MB|} = \frac{1}{2}$, 记 M 的轨迹为 C .

(1) 求 C 的方程;

(2) 设圆 $C_2: x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$, 若直线 l 交曲线 C 于 P, Q 两点, l 交圆 C_1 于 R, S 两点,

且 $|PQ| = 2|RS|$, 证明: 直线 l 过定点.

【解析】

$$(1) \text{ 设 } M(x, y), \text{ 由 } \frac{|MA|}{|MB|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-4)^2 + y^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 4(x^2 - 2x + 1 + y^2) = x^2 - 8x + 16 + y^2,$$

$$\therefore 3x^2 + 3y^2 = 12 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4, \text{ 故 } C \text{ 的方程为: } x^2 + y^2 = 4.$$

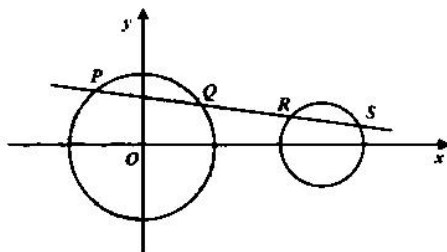
(2) 设直线 l 的方程为 $y = kx + m$,

$$\text{由 } |PQ| = 2|RS| \Rightarrow 2\sqrt{4 - \left(\frac{|m|}{\sqrt{k^2 + 1}}\right)^2} = 2 \cdot 2\sqrt{1 - \left(\frac{|4k + m|}{\sqrt{k^2 + 1}}\right)^2}$$

$$\therefore 4 - \frac{m^2}{k^2 + 1} = 4 \left[1 - \frac{(4k + m)^2}{k^2 + 1} \right], \therefore \frac{m^2}{k^2 + 1} = \frac{4(4k + m)^2}{k^2 + 1},$$

$$\therefore m^2 = 4(4k + m)^2, \Rightarrow m = 2(4k + m) \text{ 或 } 2(4k + m) = -m$$

$$\Rightarrow 8k + m = 0 \text{ 或 } 8k + 3m = 0$$



当 $8k + m = 0$ 时, $m = -8k$, 直线 $l: y = k(x - 8)$ 过定点 $(8, 0)$,

当 $8k + 3m = 0$ 时, $m = -\frac{8}{3}k$, 直线 $l: y = kx - \frac{8}{3}k = k\left(x - \frac{8}{3}\right)$ 过定点 $\left(\frac{8}{3}, 0\right)$.

所以直线 l 过定点 $(8, 0)$ 或 $\left(\frac{8}{3}, 0\right)$.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - e^{-x} - ax$, $a \in \mathbb{R}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 求证: $f(x_1) - f(x_2) < (2-a)(e^{x_1} - e^{x_2})$.

【解析】

$$(1) f'(x) = e^x + e^{-x} - a = \frac{e^{2x} - ae^x + 1}{e^x},$$

① 若 $a \leq 2$, 则 $f'(x) \geq 0$, 当且仅当 $a = 2, x = 0$ 时取等号,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增.

$$\textcircled{2} \text{ 若 } a > 2, \text{ 令 } f'(x) = 0, e^{2x} - ae^x + 1 = 0, \text{ 得 } x = \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} \text{ 或 } x = \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

$$\text{当 } x \in \left(-\infty, \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right) \cup \left(\ln \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty\right) \text{ 时, } f'(x) > 0;$$

$$\text{当 } x \in \left(\ln \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right) \text{ 时, } f'(x) < 0.$$

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right), \left(\ln \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增, 在

$\left(\ln \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)$ 上单调递减.

(2) 由 (1) 知 $f(x)$ 存在两个极值点当且仅当 $a > 2$.

$$\text{由于 } x_1 < x_2, \text{ 所以 } x_1 = \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, x_2 = \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2},$$

$$\text{且 } e^{x_1} e^{x_2} = 1, x_1 + x_2 = 0. \text{ 所以 } x_1 < 0 < x_2, \text{ 所以 } e^{x_1} < 1 < e^{x_2},$$

所以 $f(x_1) - f(x_2) < (2-a)(e^{x_1} - e^{x_2})$ 等价于 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{e^{x_1} - e^{x_2}} > 2-a$.

由于 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{e^{x_1} - e^{x_2}} = 1 + \frac{1}{e^{x_1} \cdot e^{x_2}} - a \cdot \frac{x_1 - x_2}{e^{x_1} - e^{x_2}} = 2 - a \cdot \frac{x_1 - x_2}{e^{x_1} - e^{x_2}} = 2 - a \cdot \frac{2x_1}{e^{x_1} - e^{-x_1}}$,

所以 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{e^{x_1} - e^{x_2}} > 2-a$ 等价于 $\frac{2x_1}{e^{x_1} - e^{-x_1}} < 1$, 即 $e^{x_1} - e^{-x_1} - 2x_1 < 0$.

设函数 $g(x) = e^x - e^{-x} - 2x$, 由 (1) 知 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增,

又 $x_1 < 0$, $g(0) = 0$, 所以 $e^{x_1} - e^{-x_1} - 2x_1 < 0$,

所以, $f(x_1) - f(x_2) < (2-a)(e^{x_1} - e^{x_2})$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线



微信



自主选拔在线
微信号：zizzsw



自主选拔在线
微信号：zizzsw