2023年普通高等学校招生全国统一考试(模拟)

数　学

2023.5

注意事项:

1.答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2.回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.集合 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{x|-1\leqslant\log_2 2x\leqslant 2\}$,则 $A\cap B=$

A.$\{1,2\}$　　B.$\{x|1\leqslant x\leqslant 4\}$　　C.$\{x|\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant 2\}$　　D.$\{2,3,4\}$

2.i为虚数单位,若$\frac{5}{1+a\mathrm{i}}=1+2\mathrm{i}$,则实数 $a=$

A.2　　B.$\sqrt{2}$　　C.$\sqrt{3}$　　D.-2

3.若向量 $\boldsymbol{a}=(m,1)$, $\boldsymbol{b}=(-1,3)$,则“$m=1$”是“$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$”的

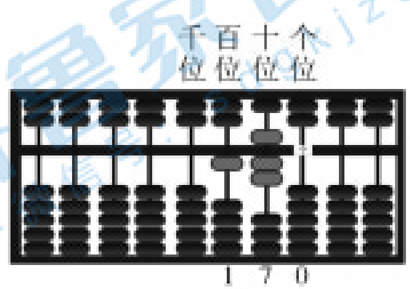
A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

4.若 $a>0$, $b>0$,且$\frac{1}{a+1}+\frac{2}{b}=1$,则 $a+b$ 的最小值为

A.$2\sqrt{2}-1$　　B.$2\sqrt{2}+2$　　C.2　　D.4

5.算盘是中国传统的计算工具,其形长方,周为木框,内贯直柱,俗称“档”,档中横以梁,梁上两珠,每珠作数五,梁下五珠,每珠作数一,算珠梁上部分叫上珠,梁下部分叫下珠.例如,在百位档拨一颗下珠,十位档拨一颗上珠和两颗下珠,则表示数字170.若在个、十、百、千位档中,先随机选择一档拨一颗上珠,再随机选择两个档位各拨一颗下珠,则所拨数字小于200的概率为



A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{1}{3}$　　C.$\frac{1}{4}$　　D.$\frac{3}{4}$

6.如图,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$\angle B=30°$,$AC=1$,若在此三角形内挖去一个以 C 为圆心、圆弧与 AB 相切的扇面,则图中阴影部分绕直线 BC 旋转一周所得几何体的表面积为

A.2π

B.$\dfrac{9\pi}{4}$

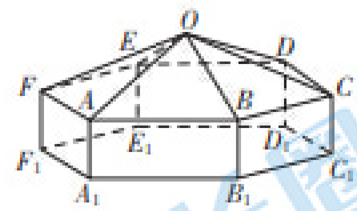
C.$\dfrac{15\pi}{4}$

D.3π

7.已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为$F$,上顶点为$A$.若存在直线$l$与椭圆交于不同的两点$B,C$,$\triangle ABC$的重心为$F$,则$l$的斜率的取值范围是

A.$(-\sqrt{2},0)$　　B.$[-\dfrac{3}{2},0)$　　C.$(-1,0)$　　D.$[-2,0)$

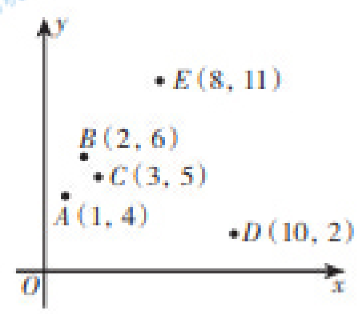
8.现有一个帐篷,下部分的形状是高为 1 m 的正六棱柱$ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$,上部分的形状是侧棱长为 3 m 的正六棱锥$O-ABCDEF$,如图.当该帐篷的体积最大时,直线$OA$与底面$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$所成角的正弦值为



A.$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　B.$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　C.$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D.$\dfrac{1}{3}$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9.某兴趣小组研究光照时长x(h)和向日葵种子发芽数量y(颗)之间的关系,采集 5 组数据,作如图所示的散点图.若去掉$D(10,2)$后,下列说法正确的是



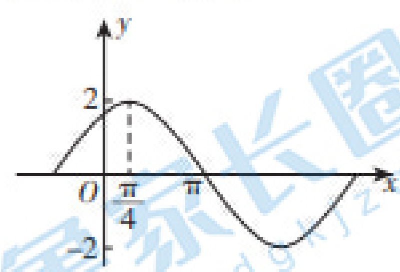
A.相关系数r变小

B.决定系数R^2变大

C.残差平方和变小

D.解释变量x与预报变量y的相关性变强

10.已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$在一个周期内的图象如图,则



A.$f(x)=2\sin(\dfrac{2}{3}x+\dfrac{\pi}{6})$

B.点$(-\dfrac{\pi}{2},0)$是一个对称中心

C.$f(x)$的单调递减区间是$[3k\pi-\dfrac{5\pi}{4},3k\pi+\dfrac{\pi}{4}](k\in\mathbf{Z})$

D.把函数$y=2\sin x$的图象上所有点的横坐标变为原来的$\dfrac{3}{2}$倍,纵坐标不变,再向左平移$\dfrac{\pi}{2}$个单位,可得$f(x)$的图象

11.一口袋中有除颜色外完全相同的 4 个红球和 3 个白球,从中无放回的随机取两次,每次取 1 个球,记事件A_1:第一次取出的是红球;事件A_2:第一次取出的是白球;事件B:取出的两球同色;事件C:取出的两球中至少有一个是白球.则

A.事件A_1,A_2为互斥事件　　B.事件B,C为独立事件

C.$P(B)=\dfrac{3}{7}$　　D.$P(C|A_1)=\dfrac{1}{2}$

12. 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的导函数分别为 $f'(x)$ 和 $g'(x)$，若 $f(x)-g(4-x)=1$，$g'(x)=f'(x-2)$，且 $f(x+2)$ 为奇函数，则

A. $\forall x\in\mathbf{R}, f(x+2)+f(-x)=0$

B. $\sum_{k=1}^{2023} f(k)=0$

C. $g(3)+g(5)=-2$

D. $\sum_{k=1}^{2023} g(k)=0$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 $(\sqrt{x}-\frac{2}{x})^n$ 的展开式中二项式系数和为 64，则 x^{-3} 的系数为______（用数字作答）.

14. 某工厂为研究某种产品的产量 x（吨）与所需某种原材料 y（吨）的相关性，在生产过程中收集了对应数据如下表：

x	3	4	5	6
y	2	m	3.8	5

根据表中数据，得出 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y}=0.6x+0.75$，则 $m=$________.

15. “中国剩余定理”又称“孙子定理”，讲的是一个关于同余的问题. 现有这样一个问题：将正整数中能被 3 除余 2 且被 2 除余 1 的数按由小到大的顺序排成一列，构成数列 $\{a_n\}$，则其前 10 项和 $S_{10}=$________.

16. 已知双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2，过右焦点 F_2 且倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线 l 与该双曲线交于 M, N 两点（点 M 位于第一象限），$\triangle MF_1F_2$ 的内切圆 O_1 的半径为 R_1，$\triangle NF_1F_2$ 的内切圆 O_2 的半径为 R_2，则点 O_1 的横坐标为______，$\frac{R_1}{R_2}=$______（第一空 2 分，第二空 3 分）.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_n=2a_n-1$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）从下面两个条件中选择一个作为条件，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

①$b_n=(2n-1)a_n$；　②$b_n=\frac{1}{(2n+1)\log_2 a_{2n}}$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

18.（12 分）

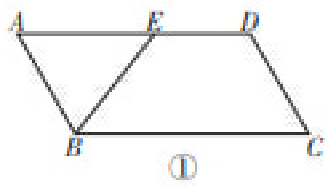
记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c，已知 $b=\frac{c}{1+2\cos A}$.

（1）证明：$A=2B$；

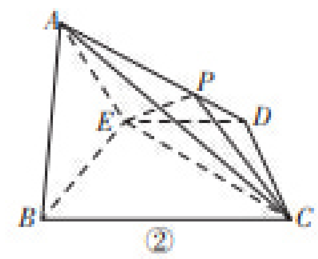
（2）若 $b=1$，求 $a+c$ 的取值范围.

19.（12 分）

如图①，在 $\square ABCD$ 中，$AD=2AB=4$，$\angle A=60°$，E 为 AD 的中点. 沿 BE 将 $\triangle ABE$ 折起，点 P 在线段 AD 上，如图②.



①



②

(1)若 $AP=2PD$,证明:AB//平面 PEC;

(2)若平面 $ABE\perp$ 平面 $BCDE$,是否存在点 P,使得平面 AEC 与平面 PEC 的夹角为 $30°$?若存在,求点 P 的位置;若不存在,说明理由.

20.(12 分)

甲流和普通感冒都属于上呼吸道感染,而甲流是流行性感冒中致病力最强的一种流感,在医学检测中发现未接种过流感疫苗者感染该病毒的比例较大.某医院选取 200 个有感冒症状的就诊患者作为样本,统计了感染甲流病毒的情况,得到下面的列联表:

接种流感疫苗与否/人数	感染甲流病毒	未感染甲流病毒
未接种流感疫苗	30	70
接种流感疫苗	10	90

(1)根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验,判断感染甲流病毒与接种流感疫苗是否有关?

(2)以样本中感染甲流病毒的频率估计概率,现从该医院所有感冒症状就诊者中随机抽取 3 人进行感染甲流病毒人数统计,求至多有 1 人感染甲流病毒的概率;

(3)该医院某病房住有 3 位甲流密切接触的病人,医院要对该病房的人员逐一进行甲流病毒检测,若检测结果出现阳性,则该病房人员全部隔离.假设该病房每位病人检测结果呈阳性的概率均为 $p(0<p<1)$ 且相互独立,记该病房至少检测了 2 位病人才确定需要隔离的概率为 $f(p)$,求当 p 为何值时,$f(p)$ 最大?

附:$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(\chi^2\geqslant k)$	0.10	0.05	0.01	0.001
k	2.706	3.841	6.635	10.828

21.(12 分)

设抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F,点 $D(p,0)$,过 F 的直线 l 交 C 于 A,B 两点.当直线 AD 垂直于 x 轴时,$|AF|=6$.

(1)求 C 的方程;

(2)若线段 AB 的垂直平分线交 C 于 M,N 两点,且 $\angle AMB+\angle ANB=\pi$,求直线 l 的方程.

22.(12 分)

已知函数 $f(x)=-ex\ln x$,$g(x)=xe^x-ex(x>0)$,$h(x)=\begin{cases}f(x),g(x)<f(x),\\g(x),g(x)\geqslant f(x).\end{cases}$

(1)求函数 $h(x)$ 的单调递减区间;

(2)若 $h(x_1)=h(x_2)=h(x_3)$,$x_3>x_2>x_1$,且 $x_2=mx_1$,证明:当 $m\in(1,e)$ 时,$x_2+x_3<\dfrac{e^2}{e-1}x_1+1$.