2023届普通高等学校招生全国统一考试
青桐鸣大联考(高三)答案
数学(理科)

1. B 【解析】根据题意，设 $z=a+bi$，所以 $z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi=2i$，所以 $\begin{cases}a^2-b^2=0,\\2ab=2,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}a=1,\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-1,\\b=-1,\end{cases}$ 所以复数 $z=1+i$ 或 $z=-1-i$，所以 $|z|=\sqrt{2}$. 故选 B.

2. A 【解析】根据题意，解得集合 $A=(0,1]$. 由 $B=\{x\,|\,|x^2-1|\leqslant 1\}$，得 $B=\{x\,|\,0\leqslant x^2\leqslant 2\}$，所以 $B=\{x\,|\,-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\}$，所以 $A\cap B=(0,1]=A$. 故选 A. 来源：高三答案公众号

3. C 【解析】根据题意可得，$\overline{x}=\frac{1}{5}\times(2+3+4+5+$ [illegible] $)=$ [illegible]，$\overline{y}=\frac{1}{5}\times$ [illegible] $21)=$ [illegible]，由于样本中心点 $(\overline{x},\overline{y})$ 在回归直线上，所以 $\hat{b}$ [illegible] 8，所以 $\hat{b}=1.9$. 故选 C.

4. B 【解析】根据题意，$1=\log_2 2>a=\log_2\sqrt{3}>\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$，$b=0.1^{-0.1}>0.1^0=1$，$c=\sin 28^\circ<\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$，比较可得 $b>a>c$. 故选 B.

5. C 【解析】根据题意 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$，可得数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=18$，所以 $a_1+a_9=4$，所以 $2a_5=4$，所以 $a_5=2$. 故选 C.

6. B 【解析】根据题意，当 $a<1$ 时，$f(f(a))=f(0)=0\neq 1$，不符合题意；
当 $1\leqslant a<2$ 时，$f(f(a))=f(a+1)=-\ln a+1=1$，解得 $a=1$；
当 $a=2$ 时，$f(f(a))=f(1)=2\neq 1$，不符合题意；
当 $a>2$ 时，$f(f(a))=f[-\ln(a-1)+1]=0\neq 1$，不符合题意. 故选 B.

7. D 【解析】根据题意，第二象限角 α 满足 $\tan\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，可得 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{21}}{7}$，$\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{7}}{7}$，所以 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{4\sqrt{3}}{7}$，$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{1}{7}$.
$\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2\alpha\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\cos 2\alpha=-\frac{11}{14}$. 故选 D.

8. D 【解析】根据题意，当 $\frac{a}{b}$ 与 $\frac{b}{a}$ 为负数时，根据不等式可得 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=-\left[\left(-\frac{a}{b}\right)+\left(-\frac{b}{a}\right)\right]\leqslant-2\sqrt{\left(-\frac{a}{b}\right)\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)}=-2$，选项 A 不正确；因为 x 不一定为正数，由 A 可知，选项 B 不正确；令 $\sin^2\alpha=t\in(0,1]$，所以 $t+\frac{2}{t}$ 的最小值为 3，选项 C 不正确；[illegible] $\frac{1}{x^2+2}=x^2+2+\frac{1}{x^2+2}-2$，因为 $x^2+2\geqslant 2$，所以 [illegible] $\frac{1}{x^2+2}-$ [illegible] $\frac{1}{2}-$ [illegible] $\frac{1}{2}$，选项 D 正确. 故选 D.

9. B 【解析】根据题意，$2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=|\overrightarrow{AB}|$ [illegible] $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AO}|\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}\rangle=|\overrightarrow{AB}|^2$，所以 $|\overrightarrow{AO}|\cdot\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}\rangle=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$，可得向量 $\overrightarrow{AO}$ 在向量 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影为 $|\overrightarrow{AB}|$ 的一半，可分析出点 O 在边 AB 的中垂线上，同理可得，点 O 在边 AC 的中垂线上，所以点 O 为该三角形的外心.
故选 B.

10. A 【解析】根据题意，分析可知点 P 的运动轨迹与几何体表面所交部分可看成 2 个半径为 1 的 $\frac{1}{4}$ 圆和 2 个半径为 1 的半圆，长度为 $6\times\frac{1}{4}\times 2\pi\times 1=3\pi$. 故选 A.

11. B 【解析】由已知及正弦定理得 $a^2-\sqrt{3}ac=b^2-c^2$，所以 $a^2+c^2-b^2=\sqrt{3}ac$，所以 $\cos B=$

$\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{6}$. 由△ABC 的外接圆面积为 π，得外接圆的半径为 1. 由正弦定理得 $b=2\sin B=1$，所以 $a^2+c^2-1=\sqrt{3}ac$，所以 $a^2+c^2=\sqrt{3}ac+1\geqslant 2ac$，解得 $ac\leqslant 2+\sqrt{3}$，所以△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{4}ac\leqslant\frac{2+\sqrt{3}}{4}$，当且仅当 $a=c$ 时等号成立. 故选 B.

12. C 【解析】由题知 $|F_1F_2|=2\sqrt{3}$，设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，则 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}mn\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}mn$，由余弦定理得 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{m^2+n^2-12}{2mn}=\frac{1}{2}$，即 $m^2+n^2=mn+12$，所以 $(m+n)^2=12+3mn$，又 $m+n=2\sqrt{6}$，所以 $mn=4$，所以 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}mn\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，所以 $\frac{1}{2}|F_1F_2|y_P=\sqrt{3}y_P=\sqrt{3}$，所以 $y_P=1$，代入 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$，得 $P(2,1)$，所以直线 PQ：$y=(2+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$，与 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ 联立得 $(9-4\sqrt{3})y^2+2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})y-3=0$，则 $y_Py_Q=\frac{-3}{9-4\sqrt{3}}$，所以 $y_Q=-\frac{9+4\sqrt{3}}{11}$，所以 $S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}|OF_2|(y_P-y_Q)=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times(1-y_Q)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(1+\frac{9+4\sqrt{3}}{11}\right)=\frac{6+10\sqrt{3}}{11}$.

故选 C.

13. $y=\pm\frac{x}{2}$ 【解析】根据题意，双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$，所以 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，所以 $c=\sqrt{5}$，由 $c^2=a^2+b^2$，得 $b^2=1$，所以双曲线方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$，因此该双曲线的渐近线为 $y=\pm\frac{x}{2}$.

14. $-\frac{2}{3}$ 【解析】根据题意，$f(x)\cdot f(x+3)=-2$，所以 $f(x+3)=\frac{-2}{f(x)}$，$f(x+6)=\frac{-2}{f(x+3)}$，$f(x+6)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 的周期为 6，所以 $f(11)=f(5)=\frac{-2}{f(2)}=-\frac{2}{3}$.

15. $\frac{5}{4}$ 【解析】根据题意，$f(x)=A\sin^2\left(\omega x+\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{A}{2}\cos\left(2\omega x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{A}{2}$，因为图象关于点 $\left(\frac{\pi}{2},2\right)$ 中心对称，分析可得 $\frac{A}{2}=2$，所以 $A=4$，所以 $f(x)=-2\cos\left(2\omega x+\frac{\pi}{4}\right)+2$，$2\omega\times\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $\omega=\frac{1}{4}+k(k\in\mathbf{Z})$，又因为最小正周期为 T，且 $\frac{\pi}{2}<T<\frac{3\pi}{2}$，所以可得 $\frac{\pi}{2}<\frac{2\pi}{2\omega}<\frac{3\pi}{2}$，则 $\frac{2}{3}<\omega<2$，所以 ω 的值为 $\frac{5}{4}$.

16. $\left[\frac{\ln 3}{18},\frac{\ln 2}{4}\right)$ 解析：易知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，由 $f(x)<0$ 有且仅有 1 个整数解得，不等式 $\frac{\ln x}{x^2}>a(x-1)$ 有且仅有 1 个整数解.

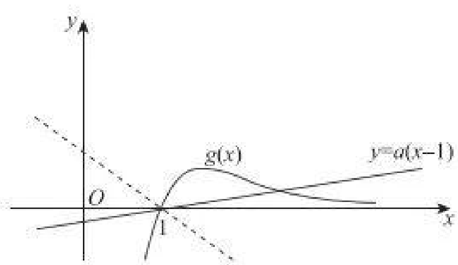
设 $g(x)=\frac{\ln x}{x^2}$，则 $g'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}$.

当 $x\in(0,\sqrt{e})$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 为增函数；

当 $x\in(\sqrt{e},+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 为减函数.

又 $g(1)=0$，则当 $0<x<1$ 时，$g(x)<0$；当 $x>1$ 时，$g(x)>0$.

设 $y=a(x-1)$，则直线 $y=a(x-1)$ 恒过点 $(1,0)$，在同一直角坐标系中，作出函数 $g(x)$ 与直线 $y=a(x-1)$ 的图象，如图所示，



由图象可知，$a>0$，

要使不等式 $\frac{\ln x}{x^2}>a(x-1)$ 有且仅有 1 个整数解，

则$\begin{cases} a<\dfrac{g(2)}{2-1}, \\ a\geqslant\dfrac{g(3)}{3-1}, \end{cases}$解得$\dfrac{\ln 3}{18}\leqslant a<\dfrac{\ln 2}{4}$,

故实数 a 的取值范围为$\left[\dfrac{\ln 3}{18},\dfrac{\ln 2}{4}\right)$.

17. **解**:(1)根据题意$\because n(a_{n+1}-a_n)=2a_n$,

$\therefore na_{n+1}=(n+2)a_n$,

$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n+2}{n}$,

则$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{3}{1},\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{4}{2},\dfrac{a_4}{a_3}=\dfrac{5}{3},\cdots,\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\dfrac{n}{n-2}$,

$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n+1}{n-1}$,

利用累乘法可得,$\dfrac{a_n}{a_1}=\dfrac{n(n+1)}{1\times 2}$,

$\therefore a_n=n(n+1)$.

(2)根据题意 $b_n=\dfrac{(n+1)^2}{a_na_{n+1}}=\dfrac{(n+1)^2}{n(n+1)(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$,

$\therefore T_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$.

18. **解**:(1)根据题意可得 $20\times(0.02\times 10+0.01\times 30+0.015\times 50+0.005\times 70)=32$(克),

所以每副该中草药的平均重量约为 32 克.

(2)根据题意可得,按照分层抽样的方式,取出的 6 副该中草药中重量在$[20,40)$中的有 4 副,重量在$[60,80]$中的有 2 副,

所以所求概率为$\dfrac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}=\dfrac{8}{15}$.

19. **解**:(1)证明:$\because 2OH=DC$,H 为 DC 中点,

$\therefore DO\perp OC$,

$\because PO\perp$平面 $ABCD$,$OD\subset$平面 $ABCD$,

$\therefore PO\perp OD$,

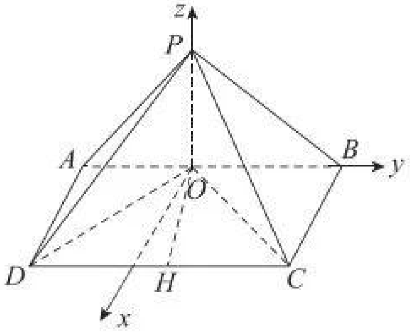
$\because OP\cap OC=O$,$PO\subset$平面 POC,$OC\subset$平面 POC,

$\therefore DO\perp$平面 POC,

又$\because DO\subset$平面 DPO,

$\therefore$平面 $DPO\perp$平面 POC.

(2)以 O 为原点,OB,OP 所在直线分别为 y 轴、z 轴,作 x 轴$\perp$平面 APB,如图所示.



设$\angle OCD=\theta$,则 $B(0,2\cos^2\theta,0)$,$C(2\sin\theta\cos\theta,2\cos^2\theta,0)$,$D(2\sin\theta\cos\theta,-2\sin^2\theta,0)$,$P(0,0,1)$,

$\overrightarrow{PB}=(0,2\cos^2\theta,-1)$,$\overrightarrow{PC}=(2\sin\theta\cos\theta,2\cos^2\theta,-1)$.

由(1)知,$\overrightarrow{OD}=(2\sin\theta\cos\theta,-2\sin^2\theta,0)$为平面 POC 的一个法向量,

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 为平面 PBC 的法向量,则

由$\begin{cases} \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PB}=0, \\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0, \end{cases}$即$\begin{cases} 2\cos^2\theta y-z=0, \\ 2\sin\theta\cos\theta x+2\cos^2\theta y-z=0, \end{cases}$

取 $y=1$,可得 $\boldsymbol{m}=(0,1,2\cos^2\theta)$,

则 $\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{|\overrightarrow{OD}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{OD}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{1+4\cos^4\theta}}$.

解得 $\cos\theta=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

又$\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$,$\therefore\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

20. **解**:(1)设点 $E(x_0,y_0)$,$y_0\geqslant 0$,则$|EF|=y_0+\dfrac{p}{2}\geqslant\dfrac{p}{2}$,

因为以 E 为圆心,以$|EF|$为半径的圆的最小面积为 π,

所以 $\pi\left(\dfrac{p}{2}\right)^2=\pi$,

所以$\dfrac{p}{2}=1$,

解得 $p=2$,

所以抛物线 C 的标准方程为 $x^2=4y$.

(2)设 $M\left(x_1,\frac{x_1^2}{4}\right)$,$N\left(x_2,\frac{x_2^2}{4}\right)$,

易得 $F(0,1)$,由题意知直线 MN 的斜率一定存在,则设直线 MN 的方程为 $y=kx+1(k\in\mathbf{R})$,

联立 $\begin{cases}x^2=4y,\\y=kx+1,\end{cases}$ 得 $x^2-4kx-4=0$,

$\Delta>0$,

所以 $x_1+x_2=4k$,$x_1x_2=-4$.

由 $y=\frac{1}{4}x^2$,得 $y'=\frac{x}{2}$,则切线 l_1 的斜率为$\frac{x_1}{2}$,则切线 l_1 的方程为 $y-\frac{x_1^2}{4}=\frac{x_1}{2}(x-x_1)$,

即 $y=\frac{x_1}{2}x-\frac{x_1^2}{4}$①.

同理可得切线 l_2 的方程为 $y=\frac{x_2}{2}x-\frac{x_2^2}{4}$②.

①−②得 $x_P=\frac{x_1+x_2}{2}=2k$,

代入①得,$y_P=\frac{x_1}{2}x-\frac{x_1^2}{4}=\frac{x_1}{2}\cdot\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{x_1^2}{4}=\frac{x_1x_2}{4}=-1$,

所以点 P 的轨迹方程为 $y=-1$.

21.**解**:(1)$f(1)=e^2-a$,

又 $f'(x)=(1+2x)e^{2x}-3ax^2$,

所以 $f'(1)=3e^2-3a$,

则曲线 $f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-(e^2-a)=(3e^2-3a)(x-1)$,

令 $y=0$ 得,$x=1-\frac{e^2-a}{3e^2-3a}=\frac{2}{3}$,

故切线在 x 轴上的截距为$\frac{2}{3}$.

(2)证明:要证函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上有两个不同的零点 x_1,x_2,只需证方程 $e^{2x}-ax^2=0$ 在$(0,+\infty)$上有两个不同的实数解,即证方程$\frac{e^x}{x}-\sqrt{a}=0$ 在$(0,+\infty)$上有两个不同的实数解,

设 $g(x)=\frac{e^x}{x}-\sqrt{a}(x>0)$,则 $g'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$,

当 $x\in(0,1)$时,$g'(x)<0$;当 $x\in(1,+\infty)$时,$g'(x)>0$,

所以 $g(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增,

因为 $g(1)=e-\sqrt{a}<0$,$g\left(\frac{1}{5}\right)=5e^{\frac{1}{5}}-\sqrt{a}>0$,所以存在 $x_1\in(0,1)$,使得 $g(x_1)=0$;

又 $g(2)=\frac{e^2}{2}-\sqrt{a}<0$,$g(5)=\frac{e^5}{5}-\sqrt{a}>0$,所以存在 $x_2\in(2,5)$,使得 $g(x_2)=0$,

故函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上有两个不同的零点 x_1,x_2.

由上易知,$\sqrt{a}x_1=e^{x_1}$,$\sqrt{a}x_2=e^{x_2}$,两式相加得 $\sqrt{a}(x_1+x_2)=e^{x_1}+e^{x_2}$,

两式相减得,$\sqrt{a}(x_2-x_1)=e^{x_2}-e^{x_1}$,

则 $x_1+x_2=\frac{(x_2-x_1)(e^{x_1}+e^{x_2})}{e^{x_2}-e^{x_1}}=\frac{(x_2-x_1)(1+e^{x_2-x_1})}{e^{x_2-x_1}-1}=x_2-x_1+\frac{2(x_2-x_1)}{e^{x_2-x_1}-1}$,

令 $t=x_2-x_1$,则 $t>1$,

所以 $nx_1-x_2=\frac{n-1}{2}(x_1+x_2)-\frac{n+1}{2}(x_2-x_1)=\frac{n-1}{2}\left(t+\frac{2t}{e^t-1}\right)-\frac{n+1}{2}t=\frac{(n-1)t}{e^t-1}-t$,

设 $h(t)=\frac{(n-1)t}{e^t-1}-t(t>1)$,

则 $h'(t)=\frac{(n-1)[(1-t)e^t-1]}{(e^t-1)^2}-1<0$,

所以 $h(t)$在$(1,+\infty)$上单调递减,

则 $h(t)<h(1)=\frac{n-1}{e-1}-1=\frac{n-e}{e-1}$,

故当 $x_1<x_2$ 时,$nx_1-x_2<\frac{n-e}{e-1}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$.

22.**解**:(1)根据题意,由 $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\y=\sin\theta,\end{cases}$

得 $\begin{cases}\frac{x}{2}=\cos\theta,\\y=\sin\theta,\end{cases}$

即 $\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2=1$,

$\therefore\frac{x^2}{4}+y^2=1$,

$\therefore$曲线 C 的普通方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$;

由直线 l 过点 $M(1,0)$,倾斜角为$\frac{\pi}{4}$.

得直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$（$t$ 为参数）.

(2)根据题意，联立直线 l 的参数方程与曲线 C 的普通方程可得，$\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2+4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2=4$，

化简得 $5t^2+2\sqrt{2}t-6=0$，

可得 $\begin{cases} t_1+t_2=-\dfrac{2\sqrt{2}}{5}, \\ t_1t_2=-\dfrac{6}{5}, \end{cases}$

则 $|AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{\dfrac{8}{25}+\dfrac{24}{5}}=\dfrac{8\sqrt{2}}{5}$.

23．解：(1)依题意得 $f(x)=\begin{cases} -3x, x\leqslant -1, \\ x+4, -1<x<2, \\ 3x, x\geqslant 2. \end{cases}$

∴当 $x=-1$ 时，可得函数 $f(x)$ 取最小值 3.

(2)由(1)可得 $m=f(-1)=3$，∴$a^2+b^2=2$，

根据柯西不等式可得 $(a^2+b^2)(2^2+1^2)\geqslant(2a+b)^2$，

∴$(2a+b)^2\leqslant 10$，

∴$0<2a+b\leqslant\sqrt{10}$，

当且仅当 $a=2b$ 时等号成立．

∴$2a+b$ 的最大值为 $\sqrt{10}$.

关于我们