



参考答案及解析

河北衡水中学 2020 届全国高三第三次联合考试(I) ·理科数学

一、选择题

1. A 【解析】由题意知 $M = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 0\}$, $N = \{x | x > 2\}$, 所以 $M \supseteq N$, 故选 A.

2. C 【解析】 $z = (2+i)^2 = 3+4i$, 所以 z 的虚部为 4, 故选 C.

3. D 【解析】D 选项中, 留北京人数不到一半, 故选 D.

4. C 【解析】由题意知圆心 $(2, 1)$ 在直线 $ax+by-1=0$ 上, 则 $2a+b=1$. 又因为 $a>0, b>0$, 所以 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right)(2a+b) = \frac{2b}{a} + \frac{2a}{b} + 5 \geq 9$, 当且仅当 $a = b = \frac{1}{3}$ 时取等号, 所以 $\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right)_{\min} = 9$, 故选 C.

5. C 【解析】根据正方形的性质可设新增加的约束条件为 $x+y \leq c$, 两组对边的距离相等, 故 $d = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} = \frac{|c-2|}{\sqrt{2}}$, 所以 $c=6$ 或 $c=-2$ (舍去), 故选 C.

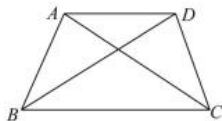
6. D 【解析】A 选项中, $a_1=2, q=3$ 满足 $\{a_n\}$ 单调递增, 故 A 错误; B 选项中, $a_1=-1, q=2$, 满足 $\{a_n\}$ 单调递减, 故 B 错误; C 选项中, 若 $a_1=1, q=\frac{1}{2}$, 则 $a_5 < a_3, S_5 - S_3 < S_5 - S_4$, 故 C 错误; D 选项中, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{q} (q \neq 0)$, 所以 $\{b_n\}$ 是等比数列, 故选 D.

7. D 【解析】 $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6} + \pi\right) = \sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$, 所以向右平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个单位长度, 故选 D.

8. B 【解析】由题意知, $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且在定义域上单调递增. 又因为 $\tan \frac{2\pi}{5} = \tan \frac{8\pi}{20} > \tan \frac{\pi}{4} = 1, 0 < \cos \frac{2\pi}{5} < 1$, 所以 $\log_3 \cos \frac{2\pi}{5} < 0$, 所以 $b < c < a$, 故选 B.

9. B 【解析】由平行四边形法则, $\vec{OA} = 2\vec{OB} + \vec{OJ} = 2(\vec{OC} + \vec{OJ}) + \vec{OJ} = 2\vec{OC} + 3\vec{OJ}$, 所以 $m=2, n=3$, 所以 $\frac{m}{n} = \frac{2}{3}$, 故选 B.

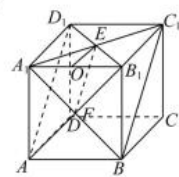
10. D 【解析】如图,



A, B, C, D 四点最多可确定 AB, AC, AD, BC, BD, CD 共 6 条边. 由题意知恰有 3 条边且无孤立点, 所以满足条件的图有 $C_6^3 - 4 = 16$ (个), 故选 D.

11. A 【解析】①显然正确; ②中离心率应该约为 0; 对于③, 根据开普勒行星运动第二定律, 地球从 D 点到 C 点运行的速度较快, 因此经历的时间较短, 因此夏半年比冬半年多几天, 故选 A.

12. A 【解析】如图, 由题意知, P 和 Q 分别为三棱锥 $B_1-A_1BC_1$ 和三棱锥 $A_1-AB_1D_1$. 设平面 A_1BC_1 与平面 AB_1D_1 的交线为 EF, 则 M 为四面体 A_1B_1EF . 取 A_1B_1 的中点 O, 连接 EO, 可得 $EO \perp$ 平面 A_1B_1F , 则 M 的体积为 $V = \frac{1}{3} \cdot EO \cdot S_{\triangle A_1B_1F} = \frac{1}{3} \times 1 \times 1 = \frac{1}{3}$, 故选 A.



二、填空题

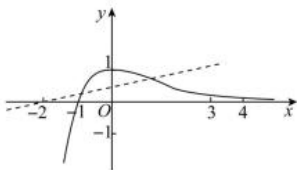
13. 60 【解析】 $T_{r+1} = C_6^r x^{6-r} \cdot (-2)^r \cdot (x^{-1})^r = (-2)^r C_6^r x^{6-2r}$, 令 $6-2r=2$, 解得 $r=2$, 所以系数为 $C_6^2 \cdot (-2)^2 = 60$.

14. $\frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ 【解析】因为 $a_3 \cdot a_4 = S_7 = \frac{a_1+a_7}{2} \times 7 = 7a_4$, 所以 $a_3=7, d=3, S_n = n + \frac{n(n-1)}{2} \times 3 =$

$$\frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n.$$

15. 2 【解析】抛物线焦点 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 双曲线的方程可化为 $\frac{y^2}{p^2} - \frac{x^2}{2p^2} = 1$, 所以 $c^2 = 3p^2$, 所以其一个焦点 $F_1(0, \sqrt{3}p)$, 所以 $|FF_1| = \sqrt{\frac{p^2}{4} + 3p^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}p = \sqrt{13}$, 所以 $p = 2$.

16. $\left[\frac{4}{5e^3}, \frac{3}{4e^2}\right)$ 【解析】由 $f(x) = (kx + 2k)e^x$, $h(x) = \frac{x+1}{e^x}$ 在平面直角坐标系中画出函数 $g(x) = k(x+2)$ 和 $h(x) = \frac{x+1}{e^x}$ 的图象如图所示, 为了满足不等式 $f(x) < 0$ 的解集中恰有三个整数, 只需要满足 $\begin{cases} h(2) > g(2), \\ h(3) \leq g(3), \end{cases}$ 解得 $\frac{4}{5e^3} \leq k < \frac{3}{4e^2}$.



三、解答题

(一) 必考题

17. 解: (1) 由 $c \cos B = b \cos C$ 及正弦定理得 $\sin C \cos B = \sin B \cos C$,
即 $\sin(B-C) = 0$.
因为 $B-C \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $B=C$. (2分)
因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 且 $\sin \angle BAC = \frac{4}{5}$,
所以 $\cos \angle BAC = \frac{3}{5}$.
又因为 $\angle BAC = 2\angle BAD$,
所以 $2\cos^2 \angle BAD - 1 = \frac{3}{5}$,
则 $\cos \angle BAD = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. (4分)
所以 $\sin \angle BAD = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\tan \angle BAD = \frac{1}{2}$,
所以 $BD = 6$, 所以 $BC = 12$. (6分)

$$(2) \text{ 由题意得 } \cos \angle EAC = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \angle BAC \right) =$$

$$\sin \angle BAC = \frac{4}{5}, \sin \angle EAC = \frac{3}{5},$$

$$AC = AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = 6\sqrt{5}. \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{在 } \triangle ACE \text{ 中, 因为 } \cos \angle CAE = \frac{AE^2 + AC^2 - CE^2}{2AE \cdot AC}, \text{ 所以 } CE = 9. \quad (10 \text{ 分})$$

$$\text{由 } \frac{CE}{\sin \angle CAE} = \frac{AE}{\sin \angle ACE},$$

$$\text{得 } \sin \angle ACE = \frac{\sqrt{5}}{5}. \quad (12 \text{ 分})$$

18. (1) 证明: 因为 $BE \perp$ 平面 ACD , $CD \subset$ 平面 ACD ,
所以 $BE \perp CD$. (2分)

$$\text{因为 } AB \perp \text{平面 } BCD, CD \subset \text{平面 } BCD, \text{ 所以 } AB \perp CD. \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{因为 } AB \cap BE = B, \text{ 所以 } CD \perp \text{平面 } ABE. \quad (6 \text{ 分})$$

$$\text{因为 } BC \subset \text{平面 } ABE, \text{ 所以 } BC \perp CD. \quad (6 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 解: 因为 } BE \perp \text{平面 } ACD, \angle BCE \text{ 即为 } BC \text{ 与平面 } ACD \text{ 所成的角,}$$

$$\text{所以 } \angle BCE = \angle BCA = 45^\circ, \text{ 所以 } BC = AB = 1. \quad (7 \text{ 分})$$

$$\text{方法一: 过点 } B \text{ 作 } BF \perp AD \text{ 交 } AD \text{ 于 } F, \text{ 连接 } EF. \quad (7 \text{ 分})$$

$$\text{因为 } BF \perp AD, BE \perp AD, BE \cap BF = B, \text{ 所以 } AD \perp \text{平面 } BEF. \quad (7 \text{ 分})$$

$$\text{因为 } EF \subset \text{平面 } BEF, \text{ 所以 } AD \perp EF, \text{ 所以 } \angle BFE \text{ 即为二面角 } B-AD-C \text{ 的平面角.} \quad (7 \text{ 分})$$

$$\text{因为 } BE = \frac{\sqrt{2}}{2}, BF = \frac{AB \cdot BD}{AD} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad (11 \text{ 分})$$

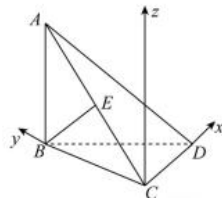
$$\text{所以 } \sin \angle BFE = \frac{BE}{BF} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (11 \text{ 分})$$

$$\text{由题图知, 二面角 } B-AD-C \text{ 的平面角为锐角, 所以二面角 } B-AD-C \text{ 的大小为 } 60^\circ. \quad (12 \text{ 分})$$

$$\text{方法二: 以 } C \text{ 为坐标原点, } \overrightarrow{CD} \text{ 方向为 } x \text{ 轴正方向, } \overrightarrow{CB} \text{ 方向为 } y \text{ 轴正方向, 建立空间直角坐标系 } C-xyz, \quad (12 \text{ 分})$$

$$\text{则 } C(0,0,0), D(1,0,0), B(0,1,0), A(0,1,1), \quad (12 \text{ 分})$$

$$\overrightarrow{CD} = (1,0,0), \overrightarrow{CA} = (0,1,1), \overrightarrow{BD} = (1,-1,0), \overrightarrow{BA} = (0,0,1). \quad (12 \text{ 分})$$



设平面 ACD 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x_1, y_1, z_1)$, 平面 ABD 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\begin{cases} \overrightarrow{CD} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{CA} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases} \begin{cases} \overrightarrow{BD} \cdot \mathbf{m} = 0, \\ \overrightarrow{BA} \cdot \mathbf{m} = 0, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 + z_1 = 0, \end{cases} \begin{cases} x_2 - y_2 = 0, \\ z_2 = 0. \end{cases} \quad (10 \text{ 分})$$

令 $y_1 = 1, x_2 = 1$, 可得 $\mathbf{n} = (0, 1, -1), \mathbf{m} = (1, 1, 0)$,

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}}{|\mathbf{n}| |\mathbf{m}|} = \frac{1}{2}. \quad (11 \text{ 分})$$

由图知, 二面角 $B-AD-C$ 的平面角为锐角,

所以二面角 $B-AD-C$ 的大小为 60° . (12 分)

19. 解: (1) 由题意知, 某年为高温年的概率为 $(0.03 + 0.01) \times 5 = 0.2$.

设今后 4 年中高温年出现 X 年, 则 $X \sim B(4, 0.2)$, (2 分)

$$\text{故 } P(X=k) = C_4^k 0.2^k 0.8^{4-k}, k=0, 1, 2, 3, 4, \quad (3 \text{ 分})$$

$$P(X=3) = C_4^3 0.2^3 0.8^1 = 0.0256,$$

$$P(X=4) = C_4^4 0.2^4 0.8^0 = 0.0016, \quad (4 \text{ 分})$$

$$P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) = 0.0256 + 0.0016 = 0.0272. \quad (6 \text{ 分})$$

(2) 若选择方案一, 设今后 4 年共损失 Y_1 元,

$$\text{则 } E(Y_1) = 4 \times 6000 \times 0.2 = 4800 \text{ (元)}. \quad (8 \text{ 分})$$

若选择方案二, 设今后 4 年共损失 Y_2 元,

$$\text{则 } E(Y_2) = 5000 - 4 \times 1000 \times 0.2 = 4200 \text{ (元)}, \quad (11 \text{ 分})$$

则 $E(Y_1) > E(Y_2)$, 故该同学应该购买遮阳伞.

(12 分)

20. 解: (1) 由 $|F_1 F_2| = 2\sqrt{3}$, 可知椭圆半焦距 $c = \sqrt{3}$.

$$\text{设 } |PF_2| = x, \text{ 因为 } \frac{|PF_1|}{|PF_2|} = 7, \text{ 所以 } |PF_1| = 7x.$$

$$\text{在 } \text{Rt} \triangle PF_1 F_2 \text{ 中, } |PF_1|^2 = |PF_2|^2 + 12,$$

$$\text{所以 } x = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } 2a = 8x = 4, \text{ 解得 } a = 2, b^2 = a^2 - c^2 = 1.$$

$$\text{所以椭圆的标准方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1. \quad (4 \text{ 分})$$

(2) 记矩形面积为 S .

① 当矩形一边与坐标轴平行时, 易知 $S = 8$.

② 当矩形各边均不与坐标轴平行时,

根据对称性, 设其中一边所在直线方程为 $y = kx + m$,

则对边所在直线方程为 $y = kx - m$.

另一边所在的直线方程为 $y = -\frac{1}{k}x + n$,

则对边所在直线方程为 $y = -\frac{1}{k}x - n$,

$$\text{联立} \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4, \\ y = kx + m, \end{cases}$$

$$\text{得 } (1 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4(m^2 - 1) = 0, \quad (6 \text{ 分})$$

由题意知 $\Delta = 0$, 整理得 $4k^2 + 1 = m^2$.

$$\text{矩形的一边长为 } d_1 = \frac{|2m|}{\sqrt{k^2 + 1}},$$

$$\text{同理 } \frac{4}{k^2} + 1 = n^2, \text{ 矩形的另一边长为 } d_2 = \frac{|2n|}{\sqrt{\frac{1}{k^2} + 1}},$$

$$S = d_1 \cdot d_2 = \frac{|2m|}{\sqrt{k^2 + 1}} \cdot \frac{|2n|}{\sqrt{\frac{1}{k^2} + 1}} = \frac{|4mnk|}{k^2 + 1}$$

$$= 4 \cdot \sqrt{\frac{(4k^2 + 1)(k^2 + 4)}{(k^2 + 1)^2}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{4k^4 + 17k^2 + 4}{(k^2 + 1)^2}}$$

$$= 4 \cdot \sqrt{4 + \frac{9k^2}{(k^2 + 1)^2}} = 4 \cdot \sqrt{4 + \frac{9}{k^2 + \frac{1}{k^2} + 2}}$$

因为 $k \neq 0$, 所以 $k^2 > 0$,

所以 $k^2 + \frac{1}{k^2} \geq 2$ (当且仅当 $k^2 = 1$ 时等号成立),

$$\text{所以 } \frac{9}{k^2 + \frac{1}{k^2} + 2} \in \left(0, \frac{9}{4}\right],$$

$$\text{则 } \sqrt{4 + \frac{9}{k^2 + \frac{1}{k^2} + 2}} \in \left(2, \frac{5}{2}\right],$$

所以 $S \in [8, 10]$.

综上所述, 该矩形面积的取值范围为 $[8, 10]$. (12 分)

21. (1) 解: $f(x_1) = e^{x_1} + x_1 - 2 = 0$,

$$g(x_1) = \ln x_1 + x_1 = \ln x_1 - e^{x_1} + 2. \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{方法一: } \ln x_1 - e^{x_1} + 2 \leq \ln x_1 - (x_1 + 1) + 2 = \ln x_1 - x_1 + 1 \leq 0. \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{因为 } x_1 \neq 1, \text{ 所以 } \ln x_1 - x_1 + 1 < 0, \text{ 所以 } g(x_1) < 0. \quad (5 \text{ 分})$$

因为 $g(x_2) = 0$, 且 $g(x)$ 单调递增, 所以 $x_1 < x_2$.

(6 分)

方法二: 设 $H(x_1) = \ln x_1 + x_1 = \ln x_1 - e^{x_1} + 2$,

令函数 $H(t) = \ln t - e^t + 2, t > 0$.

则 $H'(t) = \frac{1}{t} - e^t$, 令 $H'(t_0) = \frac{1}{t_0} - e^{t_0} = 0$, (2分)

则函数 $H(t)$ 在区间 $(0, t_0)$ 上单调递增, $H(t)$ 在区间 $(t_0, +\infty)$ 上单调递减, (3分)

所以 $H(t)_{\max} = H(t_0) = \ln t_0 - e^{t_0} + 2 = -t_0 - \frac{1}{t_0} + 2 < 0$. (4分)

所以 $g(x_1) < 0$. (5分)

因为 $g(x_2) = 0$, 且 $g(x)$ 单调递增, 所以 $x_1 < x_2$. (6分)

(2) 证明: 令函数 $h(x) = f(x) - g(x)$, (7分)

则 $h(x_1) = -g(x_1)$, $h(x_2) = f(x_2)$. (7分)

要证 $f(x_2) + g(x_1) < 0$, 即证 $f(x_2) < -g(x_1)$,

只要证: $h(x_2) < h(x_1)$,

只要证: 函数 $h(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上单调递减. (8分)

由题意得 $h(x) = f(x) - g(x) = e^x - \ln x - 2$,

$h'(x) = e^x - \frac{1}{x}$, $h'(x_2) = e^{x_2} - \frac{1}{x_2}$. (9分)

因为 $g(x_2) = \ln x_2 + x_2 = 0$,

所以 $x_2 = -\ln x_2 = \ln \frac{1}{x_2}$, (10分)

所以 $e^{x_2} = \frac{1}{x_2}$, $h'(x_2) = e^{x_2} - \frac{1}{x_2} = 0$. (11分)

因为 $h'(x)$ 单调递增, 所以在区间 $[x_1, x_2]$ 上 $h'(x) \leq 0$,

所以 $h(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上单调递减.

所以原命题得证. (12分)

(二) 选考题

22. 解: (1) 因为 $t_1 = 1, t_2 = 3$, 所以 $M(-1, -1), N(1, 3)$,

所以直线 MN 的方程为 $y = 2x + 1$. (2分)

曲线 D 的方程可化为 $x^2 + (y - a)^2 = a^2$. (3分)

因为直线 MN 平分曲线 D , 所以直线 MN 过点 $(0, a)$,

所以 $a = 1$. (5分)

(2) 由题意得 $k_{MN} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} =$

$\frac{(t_1^2 - 2t_1) - (t_2^2 - 2t_2)}{(t_1 - 2) - (t_2 - 2)} = \frac{(t_1 - t_2)(t_1 + t_2 - 2)}{t_1 - t_2} = \sqrt{3}$.

曲线 D 的方程为 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$. (6分)

设直线 MN 的方程为 $y = \sqrt{3}x + m$, 圆心 D 到直

线 MN 的距离为 d . (7分)

因为 $d^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1^2$, 所以 $\left(\frac{m-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$, (8分)

所以 $m = 0$ 或 $m = 2$. (9分)

所以直线 MN 的方程为 $y = \sqrt{3}x$ 或 $y = \sqrt{3}x + 2$. (10分)

23. 解: (1) 由题意得 $f(x) = |x+1| + 2|x-3| =$

$\begin{cases} -3x+5, & x < -1, \\ -x+7, & -1 \leq x \leq 3, \\ 3x-5, & x > 3. \end{cases}$ (2分)

当 $x < -1$ 时, $f(x) \leq 8$ 无解;

当 $-1 \leq x \leq 3$ 时, 由 $f(x) \leq 8$, 即 $-x+7 \leq 8$,

解得 $-1 \leq x \leq 3$;

当 $x > 3$ 时, 由 $f(x) \leq 8$, 即 $3x-5 \leq 8$, 解得 $3 < x \leq \frac{13}{3}$. (4分)

综上, 解集为 $\{x \mid -1 \leq x \leq \frac{13}{3}\}$. (5分)

(2) ① 当 $x = 1$ 时, $f(x) \geq g(x)$ 显然恒成立.

② 当 $x \in [-1, 1)$ 时, $f(x) = 7 - x, g(x) = a(1 - x)$.

因为 $f(x) \geq g(x)$ 恒成立,

所以 $7 - x \geq a(1 - x)$, 即 $a \leq \frac{7-x}{1-x} = 1 + \frac{6}{1-x}$ 恒成立.

令 $F(x) = 1 + \frac{6}{1-x}, x \in [-1, 1)$, 则 $a \leq F(x)_{\min}$.

显然 $F(x)$ 在区间 $[-1, 1)$ 上为增函数,

所以 $F(x)_{\min} = F(-1) = 4$, 所以 $a \leq 4$.

③ 当 $x \in (1, 3]$ 时, $f(x) = 7 - x, g(x) = a(x - 1)$.

因为 $f(x) \geq g(x)$ 恒成立,

所以 $7 - x \geq a(x - 1)$, 即 $a \leq \frac{7-x}{x-1} = -1 + \frac{6}{x-1}$ 恒成立.

令 $G(x) = -1 + \frac{6}{x-1}, x \in (1, 3]$, 则 $a \leq G(x)_{\min}$.

显然 $G(x)$ 在区间 $(1, 3]$ 上为减函数,

所以 $G(x)_{\min} = G(3) = 2$.

所以 $a \leq 2$.

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 2]$. (10分)

关于我们

自主招生在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（<http://www.zizzs.com/>）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线