高二数学试题参考答案

2023.7

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.D 2.C 3.B 4.C 5.D 6.B 7.A 8.D

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对得 5 分,部分选对得 2 分,有选错的得 0 分.

9.BC 10.ABD 11.BCD 12.AC

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13.1 14.-2 15.$\frac{9}{2}$ 16.$(0,2),(4,+\infty)$(第一空 2 分,第二空 3 分)

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.(10 分)

解:(1)因为 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+ax$,所以 $f'(x)=x^2+2x+a$. ······ 1 分

因为曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线平行于直线 $y=0$,

所以 $f'(1)=3+a=0$, ······ 2 分

所以 $a=-3$. ······ 3 分

(2)由(1)可得 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x$,$f'(x)=x^2+2x-3$,

令 $f'(x)=0$,得 $x=-3$,或 $x=1$. ······ 5 分

当 x 发生变化时,$f'(x)$,$f(x)$的变化情况如下表:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

······ 8 分

因此,当 $x=-3$ 时,$f(x)$有极大值,并且极大值为 $f(-3)=9$; ······ 9 分

当 $x=1$ 时,$f(x)$有极小值,并且极小值为 $f(1)=-\frac{5}{3}$. ······ 10 分

18.(12分)

解:(1)因为展开式中前三项的二项式系数之和为22,所以 $C_n^0+C_n^1+C_n^2=22$,…… 1分

即 $n^2+n-42=0$,…… 3分

解得 $n=6$,或 $n=-7$(舍). …… 5分

所以展开式中共7项,二项式系数最大的项为第4项,…… 6分

即 $T_4=C_6^3(2\sqrt{x})^3(-\frac{1}{\sqrt{x}})^3=-160$. …… 7分

(2)由题意知展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r(2\sqrt{x})^{6-r}(-\frac{1}{\sqrt{x}})^r=(-1)^rC_6^r2^{6-r}x^{3-r}$,

$r=0,1,2,\cdots,6$. …… 9分

令 $3-r=2$,解得 $r=1$. …… 10分

所以展开式中含 x^2 的项为 $T_2=(-1)^1\times C_6^1\times 2^5\times x^2=-192x^2$. …… 12分

19.(12分)

解:(1)当 $a=-10$ 时,$f(x)=\log_2(4^x-10\cdot 2^x+16)$.

由 $4^x-10\cdot 2^x+16=(2^x-8)(2^x-2)>0$, …… 2分

得 $2^x>8$,或 $2^x<2$, …… 3分

解得 $x>3$,或 $x<1$,…… 4分

所以,函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$. …… 5分

因为函数 $f(x)$ 的定义域不关于原点对称,所以 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数. …… 6分

(2)因为 $x\in[2,+\infty)$ 时,$f(x)>x$ 恒成立,

所以 $\log_2(4^x+a\cdot 2^x+16)>\log_2 2^x$,即 $4^x+a\cdot 2^x+16>2^x$. …… 7分

令 $t=2^x(x\geqslant 2)$,则 $t\geqslant 4$. …… 8分

故 $t^2+(a-1)t+16>0$ 对于 $\forall t\in[4,+\infty)$ 恒成立,

即 $a>-\frac{t^2+16}{t}+1=1-(t+\frac{16}{t})$ 对于 $\forall t\in[4,+\infty)$ 恒成立. …… 9分

因为 $1-(t+\frac{16}{t})\leqslant 1-2\sqrt{t\cdot\frac{16}{t}}=-7$,当且仅当 $t=\frac{16}{t}$,即 $t=4$ 时,"="成立.

所以,$a>-7$. …… 11分

所以 a 的取值范围是 $(-7,+\infty)$. …… 12分

20.(12分)

解:(1)应该选择模型②, ………………………………………………………… 1分

理由如下:由于模型②残差点比较均匀地落在水平的带状区域中,且带状区域的宽度比模型①的带状区域宽度窄,所以模型②的拟合效果更好,故模型②更合适. ……… 3分

(2)根据模型②,令 $t=\sqrt{x}$,先建立 y 关于 t 的线性回归方程.

由于 $\hat{d}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{10}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{10}(t_i-\bar{t})^2}=\dfrac{28.35}{4.5}=6.3$, ………………………………………… 5分

$\hat{c}=\bar{y}-\hat{d}\bar{t}=75-6.3\times2.25=60.825$, ………………………………………… 7分

所以,y 关于 t 的线性回归方程为 $\hat{y}=6.3t+60.825$, ………………………………… 8分

因此,y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y}=6.3\sqrt{x}+60.825$. ………………………………… 9分

将2028年的年份代码 $x=16$ 代入,得 $\hat{y}=6.3\times\sqrt{16}+60.825=86.025$, ……… 11分

所以,预测该公司2028年高科技研发投入约为86.025亿元. ………………………… 12分

21.(12分)

解:(1)

	户外体育锻炼不达标	户外体育锻炼达标	合计
男	30	15	45
女	45	10	55
合计	75	25	100

………………………………………………………………………………………… 1分

零假设为 H_0:性别与户外体育锻炼是否达标无关联. ………………………………… 2分

根据列联表中的数据,经计算得到

$\chi^2=\dfrac{100\times(30\times10-15\times45)^2}{75\times25\times45\times55}=\dfrac{100}{33}\approx3.030<3.841=x_{0.05}$. ………………………… 3分

根据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验,没有充分证据推断 H_0 不成立,因此可以认为 H_0 成立,即认为性别与户外体育锻炼是否达标无关联. ………………………………… 4分

(2)易知,所抽取的5名居民中,男性为 $5\times\dfrac{30}{75}=2$ 名,女性为 $5\times\dfrac{45}{75}=3$ 名. ……… 5分

X 的所有可能取值为0,1,2.

$P(X=0)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}$，

$P(X=1)=\frac{C_2^1C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{5}$，

$P(X=2)=\frac{C_2^2C_3^1}{C_5^3}=\frac{3}{10}$，…………………………………………………… 8 分

所以，X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

…………………………………………………………………………………… 9 分

所以，$E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$. ………………………………… 10 分

(3)设所抽取的 3 名居民中，“户外体育锻炼达标”的人数为 ξ，列联表中居民“户外体育锻炼达标”的频率为$\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$，将频率视为概率，则 $\xi\sim B(3,\frac{1}{4})$， ………………… 11 分

所以 $P(\xi=2)=C_3^2\times(\frac{1}{4})^2\times(\frac{3}{4})^1=\frac{9}{64}$.

所以从该市所有居民中随机抽取 3 人，其中恰有 2 人“户外体育锻炼达标”的概率为$\frac{9}{64}$.

…………………………………………………………………………………… 12 分

22.(12 分)

解：(1)由题易知，函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$， ………………………………… 1 分

$f'(x)=\frac{a}{x}+x-(a+1)=\frac{(x-1)(x-a)}{x}$. ………………………………………… 2 分

令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$，或 $x=a$.

①当 $a\leqslant 0$ 时，$0<x<1$ 时，$f'(x)<0$；$x>1$ 时，$f'(x)>0$.

所以函数 $f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增. ……………………… 3 分

②当 $0<a<1$ 时，$0<x<a$，或 $x>1$ 时，$f'(x)>0$；$a<x<1$ 时，$f'(x)<0$.

所以函数 $f(x)$在$(0,a)$，$(1,+\infty)$上单调递增，在$(a,1)$上单调递减. …………… 4 分

③当 $a=1$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立，所以函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

…………………………………………………………………………………… 5 分

④当 $a>1$ 时，$0<x<1$，或 $x>a$ 时，$f'(x)>0$；$1<x<a$ 时，$f'(x)<0$.

所以函数 $f(x)$在$(0,1)$，$(a,+\infty)$上单调递增，在$(1,a)$上单调递减. …………… 6分

(2)法一：由(1)知，当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

又 $f(1)=-\frac{3}{2}<0$，$f(e^2)=\frac{1}{2}(e^2-2)^2>0$，

所以，存在唯一的 $x_0\in(1,e^2)$，使得 $f(x_0)=0$，即 $f(x)$有唯一一个零点. ……… 7分

当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$在$(0,a)$，$(1,+\infty)$上单调递增，在$(a,1)$上单调递减，

函数 $f(x)$的极大值为 $f(a)=a\ln a+\frac{1}{2}a^2-(a+1)a=a(\ln a-\frac{1}{2}a-1)<0$，

且极小值为 $f(1)<f(a)<0$.

又 $f(e^2)=\frac{1}{2}(e^2-2)(e^2-2a)>0$，

所以，存在唯一的 $x_0\in(1,e^2)$，使得 $f(x_0)=0$，即 $f(x)$有且只有1个零点. …… 9分

当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$在$(0,1)$，$(a,+\infty)$上单调递增，在$(1,a)$上单调递减，

函数 $f(x)$的极大值为 $f(1)=-a-\frac{1}{2}<0$，

且极小值为 $f(a)<f(1)<0$，$f(2a+2)=a\ln(2a+2)>0$，

所以，存在唯一的 $x_0\in(a,2a+2)$，使得 $f(x_0)=0$，即 $f(x)$有且只有1个零点.

……………………………………………………………………………………… 11分

综上所述，当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$有且只有1个零点. ……………………………… 12分

法二：由 $f(x)=0$ 得，$a(x-\ln x)=\frac{1}{2}x^2-x$.

因为 $x>0$ 时，易证 $x-\ln x>0$，

所以 $a=\dfrac{\frac{1}{2}x^2-x}{x-\ln x}$. ……………………………………………………………… 7分

设 $h(x)=\dfrac{\frac{1}{2}x^2-x}{x-\ln x}$，$x>0$，

则 $h'(x)=\dfrac{(x-1)(x-\ln x)-(\frac{1}{2}x^2-x)(1-\frac{1}{x})}{(x-\ln x)^2}=\dfrac{\frac{1}{2}(x-1)(x+2-2\ln x)}{(x-\ln x)^2}$. … 8分

再设 $g(x)=x+2-2\ln x$，$x>0$.

则 $g'(x)=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}$.

当 $0<x<2$ 时,$g'(x)<0$;当 $x>2$ 时,$g'(x)>0$.

所以,$g(x)$在$(0,2)$上单调递减,在$(2,+\infty)$上单调递增.

所以,$g(x)_{\min}=g(2)=4-2\ln 2>0$,

所以,$g(x)\geqslant g(x)_{\min}>0$. ………………………………………………………… 9 分

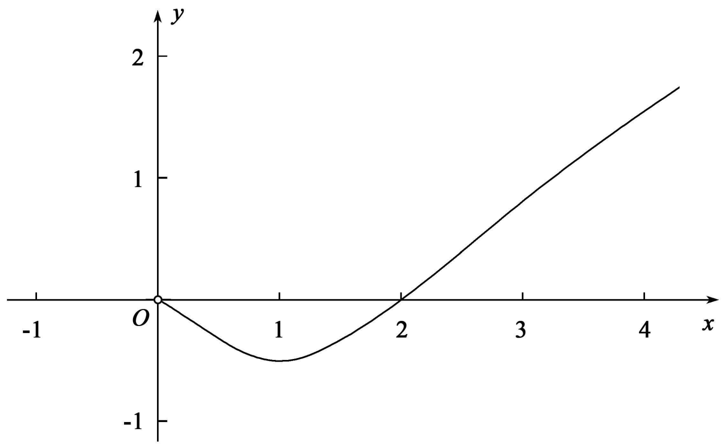
所以当 $0<x<1$ 时,$h'(x)<0$;当 $x>1$ 时,$h'(x)>0$.

所以 $h(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增.

从而 $h(x)_{\min}=h(1)=-\frac{1}{2}$. ………………………………………………………… 10 分

又因为当 $x\to 0$ 时,$h(x)\to 0$,当 $x\to+\infty$时,$h(x)\to+\infty$,且 $h(2)=0$,

所以 $h(x)$的大致图象如图所示:



故当 $a>0$ 时,$y=a$ 与 $y=h(x)$的图象只有一个交点. ……………………………… 11 分

所以 $a>0$ 时,函数 $f(x)$有且只有 1 个零点. ………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。