石家庄市2021届高中毕业班教学质量检测(二)

数 学

(时间120分钟,满分150分)

注意事项:

1.答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时,选出每小题的答案后,用2B铅笔把答题卡上的对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。

3.在答题卡上与题号相对应的答题区域内答题,写在试卷、草稿纸上或答题卡非题号对应的答题区域的答案一律无效。不得用规定以外的笔和纸答题,不得在答题卡上做任何标记。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知i为虚数单位,复数$z=\frac{1-i^{2021}}{1-i^{2018}}$,则$z$的虚部为(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}i$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}i$

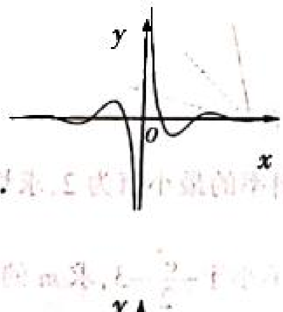
2. 抛物线$y=ax^2$经过点$M(2,1)$,则M到焦点F的距离为

A. $\frac{17}{16}$　　B. 2　　C. 3　　D. $\frac{33}{16}$

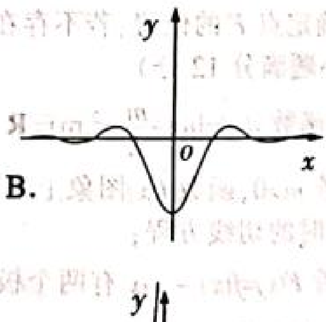
3. 已知集合$A=\left\{0,a+b,\frac{a}{b}\right\}$,$B=\{0,1-b,1\}$,$(a,b\in\mathbf{R})$,若$A=B$,则$a+2b=$

A. -2　　B. 2　　C. -1　　D. 1

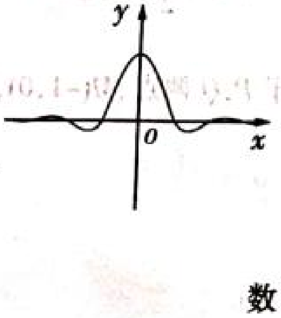
4. 函数$f(x)=\frac{\cos(\pi\cdot x)}{e^x-e^{-x}}$的图象大致为



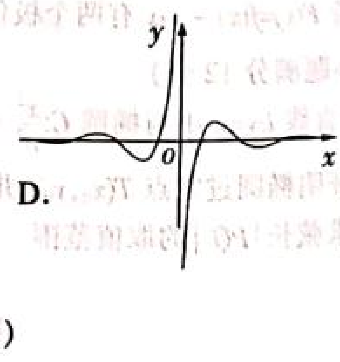
A.



B.



C.



D.

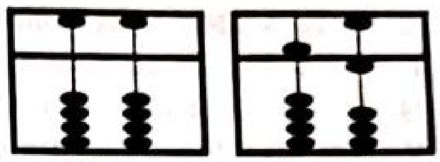
5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-1, & x\leqslant 0\\ -\log_{\frac{1}{2}}(x+1), & x>0\end{cases}$，若 $f(a)=1$，则 $f(a-2)=$

A. -1　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

6. 在边长为 1 的等边△ABC 所在平面内，有一点 P 满足 $2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=$

A. $-\frac{1}{6}$　　B. $\frac{3}{16}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $-\frac{3}{16}$

7. 算盘是一种手动操作计算辅助工具.它起源于中国，迄今已有 2600 多年的历史，是中国古代的一项重要发明，算盘有很多种类.现有一种算盘(如图一)，共两档，自右向左分别表示个位和十位，档中横以梁，梁上一珠拨下，记作数字 5，梁下四珠，上拨每珠记作数字 1 (例如图二中算盘表示整数 51). 如果拨动图一算盘中的三枚算珠，可以表示不同整数的个数为



图一　　图二

A. 16　　B. 15　　C. 12　　D. 10

8. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 底面 ABC，$BC\perp PC$，$PA=AC=\sqrt{2}$，$BC=a$，动点 Q 从 B 点出发，沿外表面经过棱 PC 上一点到点 A 的最短距离为 $\sqrt{10}$，则该棱锥的外接球的表面积为

A. 5π　　B. 8π　　C. 10π　　D. 20π

二、选择题：本小题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 某校举行学习党史知识比赛，甲、乙两个班各有 10 名同学参加，根据成绩绘制茎叶图如下，则

甲班		乙班
	6	6 8 8 8
7 4 3	7	4 6 7
8 8 5 4 2	8	6 8 9
5 4	9	

A. $\overline{x}_{甲}>\overline{x}_{乙}$　　B. $\overline{x}_{甲}<\overline{x}_{乙}$

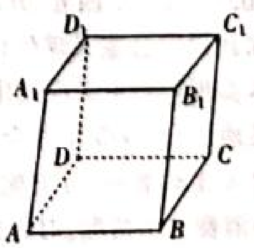
C. $S^2_{甲}<S^2_{乙}$　　D. $S^2_{甲}>S^2_{乙}$

10. 若实数 a,b 满足 $a^4<a^3b$，则下列选项中一定成立的有

A. $a^2<b^2$　　B. $a^3<b^3$

C. $e^{a-b}<1$　　D. $\ln(\frac{a}{b})<0$

11. 平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，各棱长均为 2，设 $\angle A_1AB=\angle A_1AD=\angle DAB=\theta$，则



A. 当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$AC_1=2\sqrt{3}$.

B. θ 的取值范围为 $(0,\frac{2\pi}{3})$.

C. θ 变大时，平行六面体的体积也越来越大.

D. θ 变化时，AC_1 和 BD 总垂直.

12. 已知双曲线 C:$\frac{y^2}{a^2}-x^2=1(a>0)$，其上、下焦点分别为 F_1,F_2，O 为坐标原点.过双曲线上一点 $M(x_0,y_0)$作直线 l，分别与双曲线的渐近线交于 P,Q 两点，且点 M 为 PQ 中点，则下列说法正确的是

A. 若 $l\perp y$ 轴，则$|PQ|=2$.

B. 若点 M 的坐标为(1,2)，则直线 l 的斜率为$\frac{1}{4}$.

C. 直线 PQ 的方程为$\frac{y_0y}{a^2}-x_0x=1$.

D. 若双曲线的离心率为$\frac{\sqrt{5}}{2}$，则三角形 OPQ 的面积为 2.

三、填空题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分)

13. 等比数列$\{a_n\}$中，$a_5a_9-2a_7=0$，则 $a_7=$________.

14. 若命题"$\exists x_0\in\mathbf{R},x_0^2-2x_0+m<0$"为真命题，则实数 m 的取值范围为________.

15. 某科考队有甲、乙、丙三个勘探小组，每组三名队员.该队执行考察任务时，每人佩戴一部对讲机与总部联系，若每部对讲机在某时段能接通的概率均为$\frac{1}{2}$，且对讲机能否接通相互独立．甲组在该时段能联系上总部的概率为________，在该时段至少有两个勘探小组可以与总部取得联系的概率为________．(第一个空 2 分，第二个空 3 分)

16. 已知函数 $f(x)=ax+b\cos2x+c\sin2x$，其中 $a,b,c\in\mathbf{R}$，$b^2+c^2=\frac{1}{4}$，$f'(x)$为 $f(x)$的导函数.若存在 x_1，$x_2\in\mathbf{R}$ 使得 $f'(x_1)\cdot f'(x_2)=-1$ 成立，则 $a+b+c$ 的最大值为________.

四、解答题:本题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

在①$a_5=6,a_1+S_3=50$；②$S_{12}>S_9,a_2+a_{21}<0$，③$S_9>0,S_{10}<0$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中并解决问题.

问题：设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若________________，判断 S_n 是否存在最大值，若存在，求出 S_n 取最大值时 n 的值；若不存在，说明理由.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答记分.

18. (本小题满分 12 分)

在$\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $\cos(2\pi-B)+\sin(\pi+B)=\frac{1}{5}$.

(1)求 $\sin B$；

(2)若 $\cos A=-\frac{5}{13}$，$a=5$ 求$\triangle ABC$ 的面积.

19.(本小题满分 12 分)

2021 年是"十四五"开局之年，是在全面建成小康社会、实现第一个百年奋斗目标之后，全面建设社会主义现代化国家新征程开启之年，新征程的第一阶段是 2020 年到 2035 年，基本实现社会主义现代化，其中保障农村农民的生活达到富裕是一个关键指标.

某地区在 2020 年底全面建成小康社会，随着实施乡村振兴战略规划，该地区农村居民的收入逐渐增加，可支配消费支出也逐年增加.该地区统计了 2016 年—2020 年农村居民人均消费支出情况，对有关数据处理后，制作如图 1 的折线图(其中变量 y(万元)表示该地区农村居民人均年消费支出，年份用变量 t 表示，其取值依次为 1,2,3,……).

(1)由图1可知，变量 y 与 t 具有很强的线性相关关系，求 y 关于 t 的回归方程，并预测2021年该地区农村居民人均消费支出；

(2)在国际上，常用恩格尔系数(其含义是指食品类支出总额占个人消费支出总额的比重)来衡量一个国家和地区人民生活水平的状况.根据联合国粮农组织的标准：恩格尔系数在40%~50%为小康，30%~40%为富裕. 已知2020年该地区农村居民平均消费支出构成如图2所示，预测2021年该地区农村居民食品类支出比2020年增长3%，从恩格尔系数判断2021年底该地区农村居民生活水平能否达到富裕生活标准.

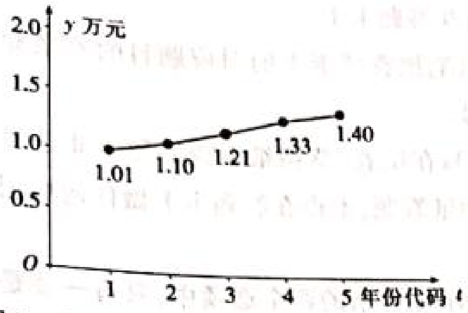


图1　2016-2020年该地区农村居民人均消费支出

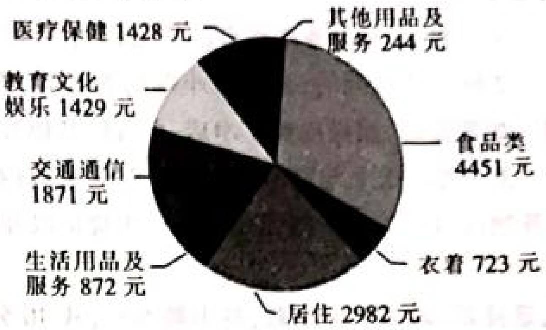


图2　2020年该地区农村居民人均消费支出构成

参考公式：回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为：

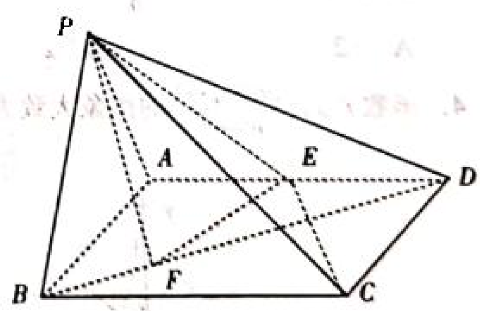
$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2},\ \hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$$

20. (本小题满分12分)

如图，四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$\triangle PAB$ 为等边三角形，平面 $PAB\perp$ 底面 $ABCD$，E 为 AD 的中点.

(1)求证：$CE\perp PD$；

(2)在线段 BD(不包括端点)上是否存在点 F，使直线 AP 与平面 PEF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$，若存在，确定点 F 的位置；若不存在，请说明理由.



21. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{m}{2}x^2$，$m\in\mathbf{R}$

(1)若 $m>0$，函数 $f(x)$ 图象上所有点处的切线中，切线斜率的最小值为2，求切线斜率取到最小值时的切线方程；

(2)若 $F(x)=f(x)-mx$ 有两个极值点，且所有极值的和不小于 $-\frac{e^2}{2}-3$，求 m 的取值范围；

22. (本小题满分12分)

已知直线 l:$y=x-1$ 与椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>1,b>0)$ 相交于 P,Q 两点，$M(-1,0)$，$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=0$

(1)证明椭圆过定点 $T(x_0,y_0)$，并求出 $x_0^2+y_0^2$ 的值；

(2)求弦长 $|PQ|$ 的取值范围.

2021 届石家庄市质检二数学答案

一、单选题

1. C　2. B　3. D　4. A　5. B　6. D　7. C　8. B

二、多选题

9. AC　10. AD　11. ABD　12. ACD

三、填空题

13. 2　　14. $(-\infty,1)$

15. $\frac{7}{8},\frac{245}{256}$　　16. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

三、解答题：（其他答案请参照本标准，教研组商定执行）

17. 解：方案一：解法一：设数列$\{a_n\}$的公差为d，

由$a_5=6$，**得**$a_1+4d=6$，**………1 分**

由$a_1+S_3=50$，**得**$4a_1+3d=50$，**………2 分**

解得：$a_1=14,d=-2$，**………4 分**

$a_n=14-2(n-1)=16-2n$，**………5 分**

$a_n\ge 0,\Rightarrow 16-2n\ge 0\Rightarrow n\le 8$，**………7 分**

故当$n\le 7$**时，**$a_n>0;\ n=8,a_n=0;\ n\ge 9$**时，**$a_n<0$，**………9 分**

故$n=7$**或**$n=8$**时，**S_n**取最大值．………10 分**

解法二：设数列$\{a_n\}$的公差为d，

由$a_5=6$，**得**$a_1+4d=6$，**………1 分**

由$a_1+S_3=50$，**得**$4a_1+3d=50$，**………2 分**

解得：$a_1=14,d=-2$，………4 分

$a_n=14-2(n-1)=16-2n$，………5 分

$S_n=-n^2+15n$………7 分

对称轴 $n=7.5$ ………8 分

故 $n=7$ 或 $n=8$ 时，S_n 取最大值. ………10 分

方案二：由 $S_{12}-S_9>0$，得 $a_{12}+a_{11}+a_{10}>0$，即 $3a_{11}>0$，………2 分

由 $a_2+a_{21}<0$，得 $a_2+a_{21}=a_{11}+a_{12}<0$，………4 分

所以 $a_{12}<0$，………6 分

故 $d=a_{12}-a_{11}<0$，………7 分

所以当 $n\le 11$ 时，$a_n>0$，$n\ge 12$ 时，$a_n<0$，………9 分

故 $n=11$ 时，S_n 取最大值. ………10 分

方案三：

由 $S_9>0$，得 $S_9=\dfrac{9(a_1+a_9)}{2}=\dfrac{9\times 2a_5}{2}>0$，

所以 $a_5>0$，………2 分

由 $S_{10}<0$，得 $S_{10}=\dfrac{10(a_1+a_{10})}{2}=\dfrac{10(a_5+a_6)}{2}<0$，

所以 $a_5+a_6<0$，………4 分

又 $a_5>0$，故 $a_6<0$，………6 分

所以 $d=a_6-a_5<0$，………7 分

所以当$n\le 5$时，$a_n>0$，$n\ge 6$时，$a_n<0$， ………9 分

故$n=5$时，S_n取最大值． ………10 分

18．解：（1）解法一：

由诱导公式，将$\cos(2\pi-B)+\sin(\pi+B)=\frac{1}{5}$

化简得 $\cos B-\sin B=\frac{1}{5}$ ①……………2 分

因为$\cos^2 B+\sin^2 B=1$ ②

由①②整理得$25\sin^2 B+5\sin B-12=0$ ……………4 分

因式分解得 $(5\sin B-3)(5\sin B+4)=0$

因为$\sin B>0$ ，所以$\sin B=\frac{3}{5}$. ……………6 分

解法二：

由诱导公式，将$\cos(2\pi-B)+\sin(\pi+B)=\frac{1}{5}$

化简得 $\cos B-\sin B=\frac{1}{5}$ ①……………2 分

平方可得：$1-2\sin B\cdot\cos B=\frac{1}{25}$

$2\sin B\cdot\cos B=\frac{24}{25}$

又因为B为三角形内角，所以$\sin B>0,\cos B>0$

$\sin B+\cos B=\sqrt{1+2\sin B\cdot\cos B}=\frac{7}{5}\cdots$ ②……………4分

由①②可得$\sin B=\frac{3}{5}$……………6分

（2）$\because\cos A=-\frac{5}{13},\therefore\sin A=\frac{12}{13}$

由正弦定理：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得$b=\frac{13}{4}$ ………7 分

由（1）知 $\cos B=\dfrac{4}{5}$ ………8 分

因为 ΔABC 中，$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\dfrac{12}{13}\times\dfrac{4}{5}-\dfrac{5}{13}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{33}{65}$ ………10 分

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times5\times\dfrac{13}{4}\times\dfrac{33}{65}=\dfrac{33}{8}$. ………12分

19．解：（1）由已知数据可求 $\bar{t}=\dfrac{1+2+3+4+5}{5}=3$,

$\bar{y}=\dfrac{1.01+1.10+1.21+1.33+1.40}{5}=1.21$, ……………………2 分

$\sum_{i=1}^{5}t_i^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$, $\sum_{i=1}^{5}t_iy_i=1\times1.01+2\times1.10+3\times1.21+4\times1.33+5\times1.40=19.16$, ……………

……4 分

$\therefore\hat{b}=\dfrac{19.16-5\times3\times1.21}{55-5\times3^2}=\dfrac{1.01}{10}=0.101$,

$\therefore\hat{a}=1.21-0.101\times3=0.907$

$\therefore$ 所求回归方程为 $\hat{y}=0.101t+0.907$ ……………………6 分

当 $t=6$ 时，$\hat{y}=0.101\times6+0.907=1.513$（万元），

$\therefore$ 2021 年该地区农村居民人均消费支出约为 1.513 万元. ……………………8 分

（2）已知 2021 年该地区农村居民平均消费支出 1.513 万元，

由图 2 可知，2020 年该地区农村居民食品类支出为 4451 元，则预测 2021 年该地区食品类支出为 $4451\times(1+3\%)=4584.53$ 元， ……………………10 分

$\therefore$ 恩格尔系数 $=\dfrac{4584.53}{15130}\times100\%\approx30.3\%\in(30\%,40\%)$

所以，2021 年底该地区农村居民生活水平能达到富裕生活标准. ……………………12 分

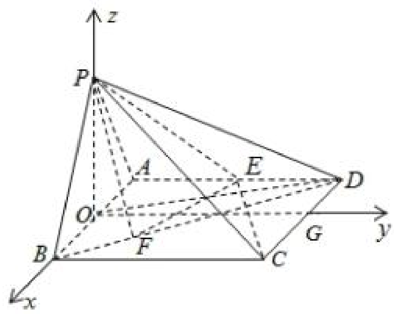
20．解：法一：（1）取 AB 的中点 O 连 PO,DO，

$\because PA=PB,\therefore PO\perp AB$，

又 $\because$ 平面 $PAB\perp$ 底面 $ABCD$，

$\therefore PO\perp$ 底面 $ABCD$，$EC\subset$ 底面 $ABCD$，

$\therefore PO\perp EC$， ………………………2 分



在正方形$ABCD$内，O,E分别为AB,AD的中点，

$\therefore \Delta DAO \cong \Delta CDE$，$\therefore \angle ODE = \angle ECD$,

又$\because \angle ECD + \angle DEC = 90^\circ, \therefore \angle DEC + \angle ODE = 90^\circ$，

$\therefore EC \perp OD$，$OD \cap PO = O$，　　……………………………4 分

$\therefore CE \perp$平面POD，$\because PD \subset$平面POD，

$\therefore CE \perp PD$.　　……………………………5 分

法二：（1）取AB的中点O连PO,DO，$\because PA = PB, \therefore PO \perp AB$，

又$\because$平面$PAB \perp$底面$ABCD$，$\therefore PO \perp$底面$ABCD$，

取CD的中点G，连OG，则OB,OP,OG两两垂直，…………………………2 分

$\therefore$ 分别以OB,OG,OP所在的直线为x轴，y轴，z轴建立如图空间直角坐标系.

设$AB = 2$，则$C(1,2,0), P(0,0,\sqrt{3}), E(-1,1,0), D(-1,2,0)$,

$\therefore \overline{CE} = (-2,-1,0), \overline{PD} = (-1,2,-\sqrt{3})$, …………………………4 分

$\therefore \overline{CE} \cdot \overline{PD} = 2 - 2 = 0$，

$\therefore CE \perp PD$. …………………………5分

（2）取CD的中点G，连OG，由（1）可知OB,OP,OG两两垂直，

$\therefore$ 分别以OB,OG,OP所在的直线为x轴，y轴，z轴建立如图空间直角坐标系.

设$AB = 2$，则$A(-1,0,0), B(1,0,0), P(0,0,\sqrt{3}), E(-1,1,0), D(-1,2,0)$，

$\therefore \overline{PE} = (-1,1,-\sqrt{3}), \overline{AP} = (1,0,\sqrt{3}), \overline{BD} = (-2,2,0), \overline{BE} = (-2,1,0)$

设$\overline{BF} = \lambda \overline{BD} (0 < \lambda < 1)$，则$\overline{BF} = (-2\lambda, 2\lambda, 0)$

$\therefore \overline{EF} = \overline{BF} - \overline{BE} = (-2\lambda + 2, 2\lambda - 1, 0)$　…………………7 分

设平面 PEF 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\because \begin{cases}\vec{n}\perp\overline{PE}\\ \vec{n}\perp\overline{EF}\end{cases}$，$\therefore \begin{cases}\vec{n}\cdot\overline{PE}=0\\ \vec{n}\cdot\overline{EF}=0\end{cases}$，

即 $\begin{cases}-x+y-\sqrt{3}z=0\\ (-2\lambda+2)x+(2\lambda-1)y=0\end{cases}$，

令 $y=1$，则 $x=\dfrac{2\lambda-1}{2\lambda-2}, z=\dfrac{1}{\sqrt{3}(2-2\lambda)}$，

$\therefore \vec{n}=(\dfrac{2\lambda-1}{2\lambda-2},1,\dfrac{1}{\sqrt{3}(2-2\lambda)})$ ……………………………9 分

设直线 AP 与平面 PEF 所成角的为 θ，

$$\therefore \sin\theta=|\cos<\overline{AP},\vec{n}>|=|\frac{\overline{AP}\cdot\vec{n}}{|\overline{AP}||\vec{n}|}|=|\frac{1}{2\cdot\sqrt{(\frac{2\lambda-1}{2\lambda-2})^2+1+(\frac{1}{\sqrt{3}(2-2\lambda)})^2}}|=\frac{\sqrt{5}}{5},$$

……………………………11 分

整理得：$9\lambda^2-6\lambda+1=0$，$\therefore \lambda=\dfrac{1}{3}$.

$\therefore$ 在 BD 上存在点 F，使得直线 AP 与平面 PEF 成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，此时点 F 为靠近点 B 的三等份点，即

$BF=\dfrac{1}{3}BD$. ……………………………12 分

21.解：（1）$f'(x)=\dfrac{1}{x}+mx,(x>0)$ ………………1 分

当 $m>0$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{x}+mx\geq 2\sqrt{m}$，即 $2\sqrt{m}=2, m=1$，当且仅当 $x=1$ 时取得等号；…………3 分

此时的切线方程为 $y=2x-\dfrac{3}{2}$；……………… 4 分

（2）$F(x)=\ln x+\dfrac{m}{2}x^2-mx,(x>0), F'(x)=\dfrac{1}{x}+mx-m=\dfrac{mx^2-mx+1}{x}$，

由题意可得：$mx^2-mx+1=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有两个不相等的实数根 x_1,x_2

则：$m>0, \mathrm{D}=m^2-4m>0, \backslash\ m>4$，且 $x_1+x_2=1, x_1x_2=\frac{1}{m}$………… 6分

$$F(x_1)+F(x_2)=(\ln x_1+\frac{m}{2}x_1{}^2-mx_1)+(\ln x_2+\frac{m}{2}x_2{}^2-mx_2)$$

所以：$=\ln x_1x_2+\frac{m}{2}((x_1+x_2)^2-2x_1x_2)-m(x_1+x_2)$

$$=\ln\frac{1}{m}+\frac{m}{2}(1-\frac{2}{m})-m=\ln\frac{1}{m}-\frac{m}{2}-1$$

…………8分

令 $g(m)=\ln\frac{1}{m}-\frac{m}{2}-1(m>4)$，函数 $g(m)$ 单调递减且 $g(e^2)=-\frac{e^2}{2}-3$，………… 10分

则 $g(m)=\ln\frac{1}{m}-\frac{m}{2}-1^{3}\ -\frac{e^2}{2}-3$ 解得 $m \pounds e^2$，

综上：m 的取值范围为 $4<m \pounds e^2$；………… 12分

22.解：（1）设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，

联立直线与椭圆方程：$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=x-1\end{cases}$，整理得 $(a^2+b^2)x^2-2a^2x+a^2-a^2b^2=0$，

$\backslash\ \mathrm{D}>0$，则 $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{2a^2}{a^2+b^2}\\ x_1\cdot x_2=\frac{a^2-a^2b^2}{a^2+b^2}\end{cases}$，……………… 2分

因为 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=0$，

所以 $(x_1+1,y_1)\cdot(x_2+1,y_2)=(x_1+1)(x_2+1)+y_1y_2=(x_1+1)(x_2+1)+(x_1-1)(x_2-1)$

$=2x_1x_2+2=0$，

所以 $x_1\cdot x_2=\frac{a^2-a^2b^2}{a^2+b^2}=-1$，$2a^2+b^2=a^2b^2$，……………… 4分

所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1$，即椭圆过定点 $T_1(1,\sqrt{2})$，$T_2(1,-\sqrt{2})$，$T_3(-1,\sqrt{2})$，$T_4(-1,-\sqrt{2}$

所以 $x_0^2+y_0^2=1+2=3$ .... 6 分

（2）

$$|PQ|=\sqrt{2}|x_1-x_2|=\sqrt{2((x_1+x_2)^2-4x_1x_2)}=\sqrt{2\left(\left(\frac{2a^2}{a^2+b^2}\right)^2+4\right)}=2\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}\right)^2+1}$$

$$=2\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}}\right)^2+1}$$ （*）.................. 8 分

由 $2a^2+b^2=a^2b^2$ 得：$b^2=\frac{2a^2}{a^2-1}>0, \therefore \frac{b^2}{a^2}=\frac{2}{a^2-1}$，

带入*式有 $$|PQ|=2\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{1}{1+\frac{2}{a^2-1}}\right)^2+1}$$ ....10 分

因为 $a^2>1$，所以 $|PQ|$ 的取值范围 $(2\sqrt{2},4)$ .... 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》