

湖南省 长沙一中 师大附中 五月份联考试卷  
雅礼中学 长郡中学

数 学 (文科) 试题

注意事项:

1. 本试卷分第 I 卷 (选择题) 和第 II 卷 (非选择题) 两部分。答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答第 I 卷时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。
3. 回答第 II 卷时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
4. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

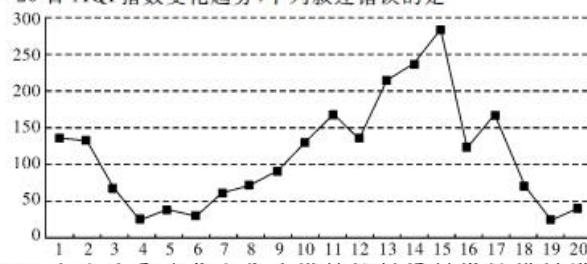
第 I 卷

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。每小题所给的四个选项中只有一个是正确的。

1. 已知集合  $A = \{x | x - 2 \geq 0\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$ , 则  $A \cap B =$   
A.  $\{1\}$  B.  $\{2\}$  C.  $\{2, 3\}$  D.  $\{1, 2, 3\}$
2. 已知  $a$  为实数, 若复数  $(a+i)(1-2i)$  为纯虚数, 则  $a =$   
A.  $-2$  B.  $-\frac{1}{2}$  C.  $\frac{1}{2}$  D.  $2$
3. 已知  $p: |x| < 2$ ;  $q: x^2 - x - 2 < 0$ , 则  $p$  是  $q$  的  
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件  
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 如图所示的风车图案中, 黑色部分和白色部分分别由全等的等腰直角三角形构成。在图案内随机取一点, 则此点取自黑色部分的概率是  
A.  $\frac{1}{4}$  B.  $\frac{1}{3}$   
C.  $\frac{2}{3}$  D.  $\frac{3}{4}$
5. 空气质量指数 AQI 是反映空气状况的指数, AQI 指数值越小, 表明空气质量越好, 其对应关系如下表:

| AQI 指数值 | 0~50 | 51~100 | 101~150 | 151~200 | 201~300 | >300 |
|---------|------|--------|---------|---------|---------|------|
| 空气质量    | 优    | 良      | 轻度污染    | 中度污染    | 重度污染    | 严重污染 |

下图是某市 10 月 1 日~20 日 AQI 指数变化趋势, 下列叙述错误的是



- A. 这 20 天中 AQI 指数值的中位数略高于 100
- B. 这 20 天中的中度污染及以上的天数占  $\frac{1}{4}$
- C. 该市 10 月的前半个月的空气质量越来越好
- D. 总体来说, 该市 10 月上旬的空气质量比中旬的空气质量好

数学 (文科) 试题 第 1 页 (共 4 页)

6. 已知实数  $x, y$  满足不等式组  $\begin{cases} x \geq 1, \\ x+y \leq 4, \\ x-y \leq 0, \end{cases}$  记  $z=2x-y$  的最大值为  $m$ , 则函数  $y=2a^{x-m}+1$

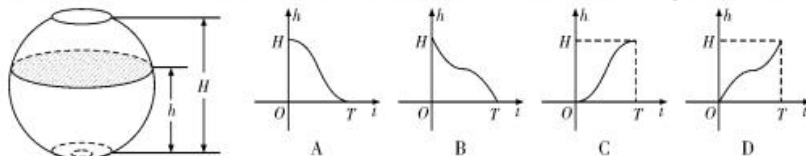
$(a>0, a \neq 1)$  的图象所过定点坐标为

- A. (1, 4) B. (2, 1)  
C. (2, 3) D. (2, 4)

7. 秦九韶是我国南宋时期的数学家, 普州(现四川省安岳县)人, 他在所著的《数书九章》中提出的多项式求值的秦九韶算法, 至今仍是比较先进的算法. 如图所示的程序框图给出了利用秦九韶算法求某多项式值的一个实例. 若输入  $n, x$  的值分别为 4, 2, 则输出  $v$  的值为

- A. 5 B. 12  
C. 25 D. 50

8. 如图, 一高为  $H$  且装满水的鱼缸, 其底部装有一排水小孔, 当小孔打开时, 水从孔中匀速流出, 水流完所用时间为  $T$ . 若鱼缸水深为  $h$  时, 水流完所用时间为  $t$ , 则函数  $h=f(t)$  的图象大致是

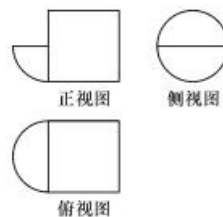


9. 要得到函数  $y=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$  的图象, 只需将函数  $y=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$  的图象

- A. 向左平移  $\frac{\pi}{8}$  个单位 B. 向右平移  $\frac{\pi}{2}$  个单位  
C. 向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位 D. 向左平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位

10. 一个几何体的三视图如图所示, 其中正视图和俯视图中的四边形是边长为 2 的正方形, 则该几何体的表面积为

- A.  $\frac{13\pi}{2}$  B.  $7\pi$   
C.  $\frac{15\pi}{2}$  D.  $8\pi$



11. 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数  $f(x)$  满足: 当  $x \geq 0$  时,  $f(x)=e^x-\frac{1}{e^x}$ . 若不等式  $f(-4t) > f(2m+mt^2)$  对任意实数  $t$  恒成立, 则实数  $m$  的取值范围是

- A.  $(-\infty, -\sqrt{2})$  B.  $(-\sqrt{2}, 0)$   
C.  $(-\infty, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$  D.  $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

12. 设  $F_1, F_2$  分别是双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$  的左、右焦点,  $O$  是坐标原点, 过  $F_2$  作  $C$  的一条渐近线的垂线, 垂足为  $P$ . 若  $|PF_1| = \sqrt{6}|OP|$ , 则  $C$  的渐近线方程为

- A.  $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$  B.  $y = \pm \sqrt{2}x$  C.  $y = \pm \sqrt{3}x$  D.  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$

## 第 II 卷

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

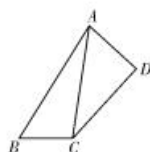
13. 已知函数  $f(x)=x^2+a\log_2 x$ , 若  $f(2)=5$ , 则  $f\left(\frac{1}{2}\right)=$  \_\_\_\_\_.

14. 已知点  $A(-1, 1)$ , 点  $B(2, y)$ , 向量  $\vec{a}=(1, 2)$ , 若  $\vec{AB} \parallel \vec{a}$ , 则实数  $y$  的值为 \_\_\_\_\_.

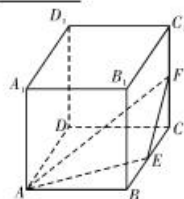
15. 如图, 在平面四边形  $ABCD$  中,  $\angle ABC=60^\circ$ ,  $AD \perp DC$ ,  $BC=2$ ,  $AD=2\sqrt{3}$ ,  $\angle ACB=\angle ACD+60^\circ$ , 则  $\tan \angle ACD=$  \_\_\_\_\_.

数学(文科)试题 第 2 页(共 4 页)

16. 如图,在棱长为 1 的正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,点  $E, F$  分别是棱  $BC, CC_1$  的中点,  $P$  是侧面  $BCC_1B_1$  上一点,若  $A_1P \parallel$  平面  $AEF$ ,则线段  $A_1P$  长度的取值范围是\_\_\_\_\_.



(第15题图)



(第16题图)

三、解答题:本大题共 70 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答,第 22~23 题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共 60 分.

17. (本小题满分 12 分)

已知  $\{a_n\}$  是等差数列,且  $\lg a_1 = 0, \lg a_4 = 1$ .

(1)求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

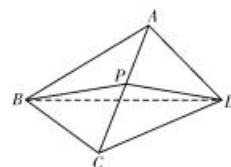
(2)若  $a_1, a_k, a_6$  是等比数列  $\{b_n\}$  的前 3 项,求  $k$  的值及数列  $\{a_n + b_n\}$  的前  $n$  项和.

18. (本小题满分 12 分)

如图,在三棱锥  $A-BCD$  中,  $\triangle ABC$  是等边三角形,  $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$ ,点  $P$  是  $AC$  的中点,连接  $BP, DP$ .

(1)证明:平面  $ACD \perp$  平面  $BDP$ ;

(2)若  $BD = \sqrt{6}, \cos \angle BPD = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ,求三棱锥  $A-BCD$  的体积.



19. (本小题满分 12 分)

某网络平台从购买该平台某课程的客户中,随机抽取了 100 位客户的数据,并将这 100 个数据按学时数、客户性别等进行统计,整理得到下表.

| 学时数 | [5, 10) | [10, 15) | [15, 20) | [20, 25) | [25, 30) | [30, 35) | [35, 40] |
|-----|---------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 男性  | 18      | 12       | 9        | 9        | 6        | 4        | 2        |
| 女性  | 2       | 4        | 8        | 2        | 7        | 13       | 4        |

(1)根据上表估计男性客户购买该课程学时数的平均值(同一组中的数据用该组区间的中点值作代表,结果保留小数点后两位);

(2)从这 100 位客户中,对购买该课程学时数在 20 以下的女性客户中按照分层抽样的方式随机抽取 7 人,再从这 7 人中随机抽取 2 人,求这 2 人购买的学时数都不低于 15 的概率;

(3)将购买该课程达到 25 学时及以上者视为“十分爱好该课程者”,25 学时以下者视为“非十分爱好该课程者”.请根据已知条件完成以下  $2 \times 2$  列联表,并判断是否有 99.9% 的把握认为“十分爱好该课程者”与性别有关?

|    | 非十分爱好该课程者 | 十分爱好该课程者 | 合计  |
|----|-----------|----------|-----|
| 男性 |           |          |     |
| 女性 |           |          |     |
| 合计 |           |          | 100 |



$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, n=a+b+c+d.$$

|                   |       |       |       |       |        |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $P(K^2 \geq k_0)$ | 0.100 | 0.050 | 0.025 | 0.010 | 0.001  |
| $k_0$             | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 10.828 |

20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的一个焦点为  $F(\sqrt{2}, 0)$ , 点  $P(\sqrt{2}, 1)$  在  $C$  上.

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 过点  $(1, 0)$  且斜率不为 0 的直线  $l$  与椭圆  $C$  相交于  $M, N$  两点, 椭圆长轴的两个端点分别为  $A_1, A_2$ ,  $A_1M$  与  $A_2N$  相交于点  $Q$ , 求证: 点  $Q$  在某条定直线上.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = (x^2 + ax - 1)e^{x-1}$ ,  $g(x) = (x^2 + ax)e^x - ax - b$ .

(1) 若  $x = -2$  是函数  $f(x)$  的极值点, 求  $f(x)$  的极小值;

(2) 若对任意的实数  $a$ , 函数  $F(x) = -ef(x) + g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上总有零点, 求实数  $b$  的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在 22、23 两题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分) [选修 4-4: 坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 2\sqrt{3} + at, \\ y = 4 + \sqrt{3}t \end{cases}$  (其中  $t$  为参数), 以坐标原点  $O$  为极点,  $x$  轴

的正半轴为极轴的极坐标系中, 点  $A$  的极坐标为  $(2, \frac{\pi}{6})$ , 直线  $l$  经过点  $A$ , 曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho \sin^2 \theta = 4 \cos \theta$ .

(1) 求直线  $l$  的普通方程与曲线  $C$  的直角坐标方程;

(2) 过点  $P(\sqrt{3}, 0)$  作直线  $l$  的垂线交曲线  $C$  于  $D, E$  两点 ( $D$  在  $x$  轴上方), 求  $\frac{1}{|PD|} - \frac{1}{|PE|}$  的值.

23. (本小题满分 10 分) [选修 4-5: 不等式选讲]

已知函数  $f(x) = |x+2| - |x-1|$ .

(1) 试求  $f(x)$  的值域;

(2) 设  $g(x) = \frac{ax^2 - 3x + 3}{x} (a > 0)$ , 若对任意  $s \in (0, +\infty)$ , 任意  $t \in (-\infty, +\infty)$ , 恒有  $g(s) \geq f(t)$  成立, 试求实数  $a$  的取值范围.

## 数学(文科)参考答案

### 一、选择题

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| 答案 | C | A | B | B | C | D | D | B | D | B  | A  | B  |

6. D 【解析】由已知条件, 可求得  $m=2$ , 故过定点  $(2, 4)$ , 选 D.

9. D 【解析】 $y = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2 \cos \left( 2x - \frac{\pi}{6} \right)$ , 故需向左平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位, 才得所求图象, 选 D.

11. A 【解析】由题意知, 当  $x \in \mathbf{R}$  时,  $f(x) = e^x - \frac{1}{e^x}$ ,

$$\therefore f'(x) = e^x + \frac{1}{e^x} > 0,$$

$\therefore f(x)$  为  $\mathbf{R}$  上的增函数, 由  $f(-4t) > f(2m + mt^2)$

得  $-4t > 2m + mt^2$ , 即  $mt^2 + 4t + 2m < 0$  对任意  $t \in \mathbf{R}$  恒成立,

$$\therefore \begin{cases} m < 0, \\ 16 - 8m^2 < 0, \end{cases} \therefore m < -\sqrt{2}, \text{ 故选 A.}$$

12. B 【解析】 $\because |PF_2| = b, |OF_2| = c, \therefore |PO| = a$ .

又因为  $|PF_1| = \sqrt{6}|OP|$ , 所以  $|PF_1| = \sqrt{6}a$ .

在  $\text{Rt}\triangle POF_2$  中,  $\cos \angle PF_2O = \frac{|PF_2|}{|OF_2|} = \frac{b}{c}$ ,

在  $\triangle PF_1F_2$  中,  $\cos \angle PF_2F_1 = \frac{|PF_2|^2 + |F_1F_2|^2 - |PF_1|^2}{2|PF_2| \cdot |F_1F_2|} = \frac{b}{c} \Rightarrow c^2 = 3a^2 \Rightarrow 2a^2 = b^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{2}x$ .

### 二、填空题

13.  $-\frac{3}{4}$

14. 7

15.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  【解析】设  $\angle ACD = \theta$ , 在  $\text{Rt}\triangle ACD$  中,  $\because AD \perp DC, AD = 2\sqrt{3}$ ,

$$\therefore AC = \frac{2\sqrt{3}}{\sin \theta},$$

在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 60^\circ + \theta, \angle ABC = 60^\circ, BC = 2$ ,

$$\therefore \angle BAC = 60^\circ - \theta.$$

$$\text{由正弦定理得: } \frac{2}{\sin(60^\circ - \theta)} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{\sin \theta}}{\sin 60^\circ},$$

得  $\sin \theta = 2 \sin(60^\circ - \theta)$ , 即  $2 \sin \theta = \sqrt{3} \cos \theta$ .

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 故 } \tan \angle ACD = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

16.  $\left[\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$  【解析】如图所示, 分别取棱  $BB_1, B_1C_1$  的中点  $M, N$ , 连接  $MN, A_1N$ ,

$A_1M$ ,  $\because M, N, E, F$  分别为所在棱的中点,

可证平面  $A_1MN \parallel$  平面  $AEF$ .

$\because P$  是侧面  $BCC_1B_1$  上一点, 且  $A_1P \parallel$  平面  $AEF$ ,

$\therefore$  点  $P$  必在线段  $MN$  上. 易得  $A_1M = A_1N = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

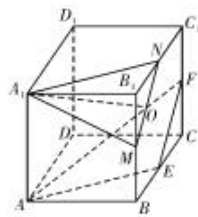
$\therefore \triangle A_1MN$  为等腰三角形.

当点  $P$  为  $MN$  中点  $O$  时,  $A_1P \perp MN$ , 此时  $A_1P$  最短;

点  $P$  位于  $M, N$  处时,  $A_1P$  最长.

$\therefore A_1O = \sqrt{A_1M^2 - OM^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ ,  $A_1M = A_1N = \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

$\therefore$  线段  $A_1P$  长度的取值范围是  $\left[\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$ .



### 三、解答题

17. 【解析】(1)  $\begin{cases} \lg a_1 = 0, \\ \lg a_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1, \\ a_4 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 3 \end{cases} \Rightarrow a_n = 3n - 2 (n \in \mathbb{N}^+).$  ..... (6分)

(2)  $\because a_1, a_4, a_6$  成等比数列,

$a_1 = 1, a_4 = 3k - 2, a_6 = 16$ ,

$\therefore (3k - 2)^2 = 1 \times 16, \therefore k = 2, \therefore b_n = 4^{n-1} (n \in \mathbb{N}^+).$

$\therefore a_n + b_n = 3n - 2 + 4^{n-1}$ ,

$\therefore \{a_n + b_n\}$  的前  $n$  项和为  $\frac{(3n-1)n}{2} + \frac{1}{3}(4^n - 1)$ . ..... (12分)

18. 【解析】(1)  $\begin{cases} \triangle ABC \text{ 为正三角形} \\ \angle BAD = \angle BCD = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow AD = CD,$   
 $\begin{matrix} AD = CD \\ P \text{ 为 } AC \text{ 中点} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} PD \perp AC \\ PB \perp AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AC \perp \text{平面 } PBD \\ AC \subset \text{平面 } ACD \end{cases} \Rightarrow \text{平面 } ACD \perp \text{平面 } PBD. \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$

(2) 设  $AB = a$ ,

在  $\text{Rt} \triangle ABD$  中,  $BD = \sqrt{6}$ , 则  $AD = \sqrt{6 - a^2}$ ,

在正  $\triangle ABC$  中,  $BP = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ,

在等腰  $\triangle ADC$  中,  $DP = \sqrt{6 - a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \sqrt{6 - \frac{5}{4}a^2}$ ,

在  $\triangle BPD$  中,  $\cos \angle BPD = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ , 由余弦定理得:  $BD^2 = BP^2 + DP^2 - 2BP \cdot DP \cdot \cos \angle BPD$ ,

$\therefore 6 = \frac{3}{4}a^2 + 6 - \frac{5}{4}a^2 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \sqrt{6 - \frac{5}{4}a^2} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ , 解得  $a = 2$ .

$\therefore S_{\triangle BPD} = \frac{1}{2}BP \cdot DP \cdot \sin \angle BPD = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$\therefore V_{A-BPD} = \frac{1}{3}AC \cdot S_{\triangle BPD} = \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ . ..... (12分)

19. 【解析】(1) 依题意, 在 100 位购买该课程的客户中, 男性客户购买该课程学时数的平均值为 16.92.

所以估计男性客户购买该课程学时数的平均值为 16.92. .... (2分)

(2) 设“所抽取的 2 人购买学时数都不低于 15”为事件 A. 依题意按照分层抽样的方式分别在学时数为  $[5, 10)$ ,  $[10, 15)$ ,  $[15, 20)$  的女性客户中抽取 1 人(设为  $a$ ), 2 人(设为  $b_1, b_2$ ), 4 人(设为  $c_1, c_2, c_3, c_4$ ), 则从这 7 人中随机抽取 2 人所包含的基本事件有  $(a, b_1), (a, b_2), (a, c_1), (a, c_2), (a, c_3), (a, c_4), (b_1, b_2), (b_1, c_1), (b_1, c_2), (b_1, c_3), (b_1, c_4), (b_2, c_1), (b_2, c_2), (b_2, c_3), (b_2, c_4), (c_1, c_2), (c_1, c_3), (c_1, c_4), (c_2, c_3), (c_2, c_4), (c_3, c_4)$ , 共 21 个, 其中事件 A 所包含的基本事件共 6 个, 所以事件 A 发生的概率  $P(A) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$ . ……………

…………… (7 分)

(3) 根据条件得  $2 \times 2$  列联表:

|    | 非十分爱好该课程者 | 十分爱好该课程者 | 合计  |
|----|-----------|----------|-----|
| 男  | 48        | 12       | 60  |
| 女  | 16        | 24       | 40  |
| 合计 | 64        | 36       | 100 |

根据列联表所给的数据代入公式得到:  $K^2 = \frac{100(48 \times 24 - 12 \times 16)^2}{64 \times 36 \times 60 \times 40} \approx 16.667 > 10.828$ , …………… (11 分)

故有 99.9% 的把握认为“十分爱好该课程者”与性别有关. …………… (12 分)

20. 【解析】(1) 依题意得: 
$$\begin{cases} c = \sqrt{2}, \\ \frac{2}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1, \text{ 解得: } a^2 = 4, b^2 = 2. \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases}$$

$\therefore$  椭圆 C 的方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ . …………… (5 分)

(2) 设  $l: x = ky + 1$ ,

$$\begin{cases} x = ky + 1, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow (k^2 + 2)y^2 + 2ky - 3 = 0,$$

设  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ ,

则  $\begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{-2k}{k^2 + 2}, & \text{①} \\ y_1 y_2 = \frac{-3}{k^2 + 2}. & \text{②} \end{cases}$  …………… (7 分)

$$l_{AM}: y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2), \quad \text{③}$$

$$l_{AN}: y = \frac{y_2}{x_2 - 2}(x - 2), \quad \text{④}$$

$$\frac{\text{①}}{\text{②}} \text{ 得 } \frac{y_1 + y_2}{y_1 y_2} = \frac{2k}{3}, \quad \text{⑤}$$

$$\therefore 3y_1 + 3y_2 = 2ky_1 y_2.$$

$$\text{联立 ③④ 得: } \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2) = \frac{y_2}{x_2 - 2}(x - 2),$$

$$\text{即 } \frac{x + 2}{x - 2} = \frac{y_2}{ky_2 - 1} \cdot \frac{ky_1 + 3}{y_1} = \frac{ky_1 y_2 + 3y_2}{ky_1 y_2 - y_1} = \frac{ky_1 y_2 + 2ky_1 y_2 - 3y_1}{ky_1 y_2 - y_1} = 3,$$

$$\therefore x = 4.$$

故点 Q 在定直线  $x = 4$  上. …………… (12 分)





21.【解析】(1)由题可得  $f'(x) = (2x+a)e^{x-1} + (x^2+ax-1)e^{x-1} = [x^2 + (a+2)x + a-1]e^{x-1}$ ,

因为  $f'(-2)=0$ , 所以  $a=-1$ ,  $f(x) = (x^2-x-1)e^{x-1}$ , 故  $f'(x) = (x^2+x-2)e^{x-1}$ ,

令  $f'(x) > 0$ , 解得  $x < -2$  或  $x > 1$ , 所以  $f(x)$  在  $(-\infty, -2), (1, +\infty)$  上单调递增, 在  $(-2, 1)$  上单调递减,  
所以  $f(x)$  极小值为  $f(1) = (1-1-1)e^{1-1} = -1$ . ..... (5分)

(2)函数  $F(x) = -ef(x) + g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上总有零点,

即  $F(x) = e^x - ax - b$  在  $(0, +\infty)$  上总有零点.

若  $a < 0$ , 则  $F(x) = e^x - ax - b$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

故  $F(x)$  在  $(0, +\infty)$  上总有零点的必要条件是  $F(0) < 0$ , 即  $b > 1$ . ..... (8分)

以下证明: 当  $b > 1$  时,  $F(x) = e^x - ax - b$  在  $(0, +\infty)$  上总有零点.

①若  $a < 0$ , 由于  $F(0) = 1 - b < 0$ ,

$F\left(-\frac{b}{a}\right) = e^{-\frac{b}{a}} - a\left(-\frac{b}{a}\right) - b = e^{-\frac{b}{a}} > 0$ , 且  $F(x)$  在  $(0, +\infty)$  上连续, 故  $F(x)$  在  $\left(0, -\frac{b}{a}\right)$  上必有零点;

②若  $a \geq 0$ ,  $F(0) = 1 - b < 0$ ,

易知  $e^x > x^2$  在  $x \in (0, +\infty)$  上恒成立, 取  $x_0 = a + b > 1$ ,

则  $F(x_0) = F(a+b) = e^{a+b} - a(a+b) - b > (a+b)^2 - a^2 - ab - b = ab + b(b-1) = b(a+b-1) > 0$ ,

由于  $F(0) = 1 - b < 0, F(a+b) > 0$ ,

故  $F(x)$  在  $(0, a+b)$  上必有零点.

综上, 实数  $b$  的取值范围是  $(1, +\infty)$ . ..... (12分)

22.【解析】(1)由题意得点  $A$  的直角坐标为  $(\sqrt{3}, 1)$ , 将点  $A$  代入  $\begin{cases} x = 2\sqrt{3} + at, \\ y = 4 + \sqrt{3}t \end{cases}$  得  $\begin{cases} a = 1, \\ t = -\sqrt{3}. \end{cases}$

则直线  $l$  的普通方程为  $y = \sqrt{3}x - 2$ .

由  $\rho \sin^2 \theta = 4 \cos \theta$  得  $\rho^2 \sin^2 \theta = 4 \rho \cos \theta$ , 即  $y^2 = 4x$ . 故曲线  $C$  的直角坐标方程为  $y^2 = 4x$ . ..... (5分)

(2)设直线  $DE$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases}$  ( $t$  为参数),

代入  $y^2 = 4x$  得  $t^2 + 8\sqrt{3}t - 16\sqrt{3} = 0$ . 设  $D$  对应的参数为  $t_1$ ,  $E$  对应的参数为  $t_2$ .

则  $t_1 + t_2 = -8\sqrt{3}, t_1 t_2 = -16\sqrt{3}$ , 且  $t_1 > 0, t_2 < 0$ .

$\therefore \frac{1}{|PD|} - \frac{1}{|PE|} = \frac{1}{|t_1|} - \frac{1}{|t_2|} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2} = \frac{1}{2}$ . ..... (10分)

23.【解析】(1)函数可化为  $f(x) = \begin{cases} -3, & x < -2, \\ 2x+1, & -2 \leq x \leq 1, \\ 3, & x > 1. \end{cases}$   $\therefore f(x) \in [-3, 3]$ . ..... (5分)

(2)若  $x > 0$ , 则  $g(x) = \frac{ax^2 - 3x + 3}{x} = ax + \frac{3}{x} - 3 \geq 2\sqrt{3a} - 3$ , 即当  $ax^2 = 3$  时,  $g(x)_{\min} = 2\sqrt{3a} - 3$ ,

又由(1)知  $f(x)_{\max} = 3$ .

若  $\forall s \in (0, +\infty), \forall t \in (-\infty, +\infty)$ , 恒有  $g(s) \geq f(t)$  成立, 则有  $g(x)_{\min} \geq f(x)_{\max}$ ,  $\therefore 2\sqrt{3a} - 3 \geq 3$ ,

$\therefore a \geq 3$ , 即  $a$  的取值范围是  $[3, +\infty)$ . ..... (10分)



自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注自主招生在线官方微信号：**zizzsw**。



微信扫一扫，快速关注