绝密★启用前

大联考·皖豫名校联盟 2024 届高中毕业班第一次考试

数　学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知全集 $U=\{x\in\mathbf{Z}|x^2-2x-8<0\}$，集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{x||x-1|=1\}$，则 $\complement_U(A\cup B)=$

A. $\{-1,1\}$　　B. $\{-1,3\}$　　C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{0,1,3\}$

2. "$a^3>b^3$"是"$2^{a+1}>2^{b-2}$"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

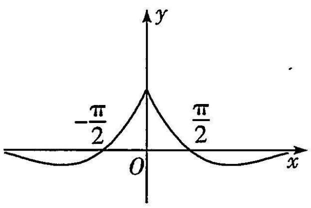
C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 已知一容器中有 A,B 两种菌，n_A 为 A 菌的个数，n_B 为 B 菌的个数，且在任何时刻 A,B 两种菌的个数均满足 $n_A\cdot n_B^2=10^{12}$. 若分别用 $P_A=\lg n_A$ 和 $P_B=\lg n_B$ 来表示 A 菌、B 菌个数的指标，则当 $P_A+P_B=10$ 时，$n_A=$

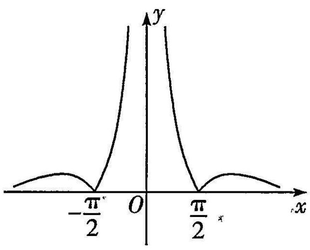
A. 10^2　　B. 10^3　　C. 10^4　　D. 10^8

4. 函数 $f(x)=\dfrac{4\cos x}{|x|+\frac{1}{2}x^2}$ 的部分图象大致为

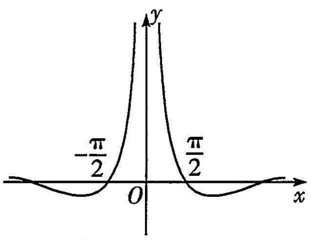
A.



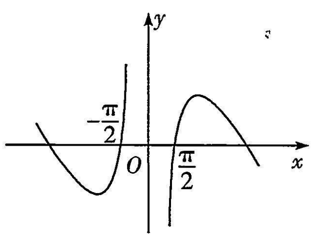
B.



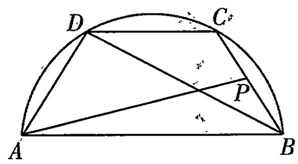
C.



D.



5. 如图,在四边形 $ABCD$ 中,$AB /\!/ CD$,AB 为其外接圆的直径,且 $AB=2AD=2$,P 为边 BC 的中点,则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BD}=$



A. $-\dfrac{7}{3}$　　B. -2

C. $-\dfrac{13}{16}$　　D. $-\dfrac{9}{4}$

6. 已知圆 $O:x^2+y^2=8$ 在点 $P(2,2)$ 处的切线上一点 $M(a,b)$ 在第一象限内,则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}$ 的最小值为

A. $\dfrac{5}{2}$　　B. 5　　C. $\dfrac{9}{4}$　　D. 9

7. 已知 $\left(x^3+\dfrac{a}{x}\right)^6(a>0)$ 的展开式中唯有第 5 项的系数最大,则 a 的取值范围是

A. $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{5}{2}\right)$　　B. $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{5}{3}\right)$　　C. $\left[\dfrac{4}{3},\dfrac{5}{3}\right]$　　D. $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{3}\right)$

8. 已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x+2)=-f(x)$,且 $\forall x_1,x_2\in(1,+\infty)$,$x_1\neq x_2$,$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$. 若 $\forall x>1$,$f(2-x-a)+f(\ln(x-1))\leqslant 0$ 恒成立,则 a 的取值范围为

A. $[-2,0)$　　B. $[-2,+\infty)$　　C. $(-2,+\infty)$　　D. $\left(-2,\dfrac{1}{2}\right]$

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. 已知某地区秋季的昼夜温差 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,且 $P(X>9)=\dfrac{1}{2}$,该地区某班级秋季每天感冒的人数 y 关于昼夜温差 x(℃)的经验回归方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+1$,秋季某天该班级感冒的学生有 9 人,其中有 4 位男生,5 位女生,则下列结论正确的是

(参考数据:$\bar{y}=19$,$\bar{x}=\mu$)

A. 若 $P(X>11)=\dfrac{2}{5}$,则 $P(7<X<9)=\dfrac{1}{10}$

B. 从这 9 人中随机抽取 2 人,其中至少有一位女生的概率为 $\dfrac{5}{6}$

C. 从这 9 人中随机抽取 2 人,其中男生人数 ζ 的期望为 $\dfrac{4}{9}$

D. 昼夜温差每提高 1 ℃,该班级感冒的学生大约增加 2 人

10. 已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的一个极大值点为 1,与该极大值点相邻的一个零点为 -1,将 $f(x)$ 的图象向左平移 1 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象,则下列结论正确的是

A. $f(x)=2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

B. $f(x)$在区间$(6,9)$上单调递增

C. $g(x)$为奇函数

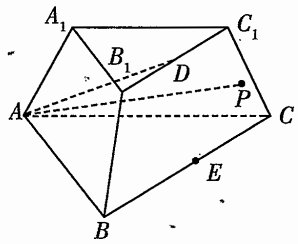
D. 若$g(x)$在区间$[-1,a]$上的值域为$[-\sqrt{2},2]$，则$a=3$

11. 定义$\langle x\rangle(x\in\mathbf{R})$为不小于$x$的最小整数，设函数$f(x)=\langle x\rangle$，则下列结论正确的是

A. $f(\langle x\rangle-x)$的值为0或1　　　　B. $f(x)$单调递增

C. 函数$y=f(x)-2x$有2个零点　　　　D. $\sum\limits_{n=1}^{20}f(\sqrt{n})=70$

12. 如图，在正三棱台$ABC-A_1B_1C_1$中，$A_1B_1=2AA_1=4$，$\angle B_1BC=\dfrac{\pi}{3}$，棱$B_1C_1$，$BC$的中点分别为$D$，$E$，点$P$在侧面$BCC_1B_1$内运动(包含边界)，且$AP=2\sqrt{7}$，则下列结论正确的是



A. $AD\perp$平面BCC_1B_1

B. 正三棱台$ABC-A_1B_1C_1$的体积为$\dfrac{50\sqrt{2}}{3}$

C. AP与平面BCC_1B_1所成角的正切值为$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

D. 动点P形成的轨迹长度为$\dfrac{4\pi}{3}$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知函数$f(x)=\dfrac{2x-1}{2x-9}$，则当$n\in\mathbf{N}^*$时，$f(n)$的最大值为________.

14. 已知复数z满足$z\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=1$，则$z$的实部为________.

15. 若函数$f(x)=\log_a(x+1)+\log_{(1+a)}x(a>0$且$a\neq1)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增，则$a$的取值范围是________.

16. 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{1}{2}$，上顶点为$A$，过左焦点$F_1$的直线$l_1$与$C$交于$D$，$E$两点，过右焦点$F_2$的直线$l_2$经过$A$点，且$l_1\perp l_2$. 若四边形$AEF_2D$的面积为$\dfrac{48}{13}$，则$C$的长轴长为________.

四、解答题：共70分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (10分)

记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，分别以a，b，c为边长的三个正三角形的面积依次为S_1，S_2，S_3. 已知$\dfrac{\cos B}{b}+\dfrac{\cos C}{c}=\dfrac{2\cos A}{a}$.

(Ⅰ)证明：$2S_1=S_2+S_3$；

(Ⅱ)若$a=2$，求$\triangle ABC$周长的最大值.

18. (12 分)

已知函数 $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 3x + 1$.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的单调区间;

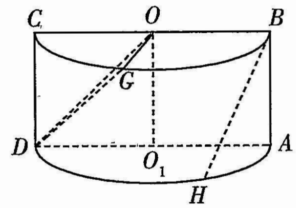
(Ⅱ)判断曲线 $y = f(x)$ 过坐标原点的切线的条数,并说明原因.

19. (12 分)

如图所示的几何体是一个圆柱沿轴截面 $ABCD$ 切开后剩余的一半,$AB = 1$,$BC = 2$,O,O_1 分别为底面直径 BC,AD 的中点,G 是 $\overset{\frown}{CB}$ 的中点,H 是 $\overset{\frown}{DA}$ 上的动点.

(Ⅰ)证明:平面 $DOG \perp$ 平面 $ABCD$;

(Ⅱ)若 $BH = \sqrt{2}$,求直线 BH 与平面 DOG 所成角的正弦值.



20. (12 分)

已知 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,$a_1 = -1$,$2S_3 = 3S_2 + 6$.

(Ⅰ)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(Ⅱ)若 $b_n = \begin{cases} a_n, n \text{ 为奇数}, \\ n \cdot (\sqrt{2})^{3+a_n}, n \text{ 为偶数}, \end{cases}$ 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n}.

21. (12 分)

已知双曲线 $C: \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上一点 $P(2,1)$ 到 C 的两条渐近线的距离之积为 $\dfrac{2}{3}$.

(Ⅰ)求 C 的标准方程;

(Ⅱ)若直线 l 与 C 有两个不同的交点 A,B,且 $\triangle APB$ 的内心恒在直线 $x = 2$ 上,求 l 在 y 轴上的截距的取值范围.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = xe^x + 1$,$g(x) = \ln x + x$.

(Ⅰ)当 $a > 0$ 时,讨论函数 $F(x) = f(x) - 1 - ag(x)$ 的零点个数;

(Ⅱ)当 $x \geqslant \dfrac{1}{e^2}$ 时,证明:$f(x)[g(x) - 1] + 3 > -\dfrac{3}{e^2}$.