2023 年吉林省延边州高三统考数学答案

1.【答案】C

【详解】集合 A 有一个元素，即方程 $ax^2-3x+2=0$ 有一解，当 a=0 时，$A=\left\{x\left|ax^2-3x+2=0\right.\right\}=\left\{x\left|-3x+2=0\right.\right\}=\left\{\frac{2}{3}\right\}$，符合题意，当 $a\neq 0$ 时，$ax^2-3x+2=0$ 有一解，则 $\Delta=9-8a=0$，解得：$a=\frac{9}{8}$，综上可得：a=0 或 $a=\frac{9}{8}$，选：C.

2.【答案】B

【详解】$\because (\mathrm{i}-1)z=2$，$\therefore z=\frac{2}{\mathrm{i}-1}=\frac{2(-i-1)}{(\mathrm{i}-1)\cdot(-i-1)}=-1-\mathrm{i}$，故 z 的虚部为 -1，$|z|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}\neq 2$，$\bar{z}=-1+\mathrm{i}$，$z^2=(-1-\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}$，所以 B 正确

3.【答案】B

【详解】因为 $\vec{a}=(-1,1),\vec{b}=(3,1)$，所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1\times 3+1\times 1=-2$，$|\vec{b}|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$，所以 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量为 $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=-\frac{1}{5}\vec{b}=\left(-\frac{3}{5},-\frac{1}{5}\right)$，故选：B.

4.【答案】D

【详解】三人挑四种书，每人有 4 种选法，共有 $4^3=64$ 种方法，恰有 2 人选同一种书的方法有 $C_3^2C_4^1C_3^1$ 种，即 36 种方法，.故恰有 2 人选同一种的概率 $P=\frac{36}{64}=\frac{9}{16}$，.故选：D.

5.【答案】C

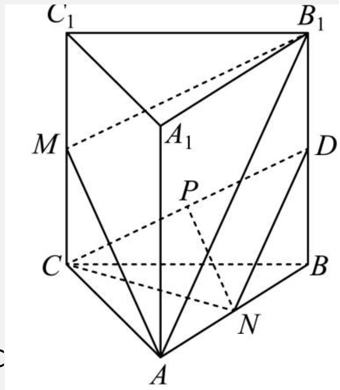
根据题意列出方程组，指数式化为对数式，结合对数运算法则，求出 $\begin{cases}t_1=50\\t_2=50\log_2 3\\t_3=50\log_2 12\end{cases}$，结合 $\log_2 12=\log_2\left(3\times 2^2\right)=\log_2 3+2$，得到 $t_3=2t_1+t_2$.

6.【答案】D

【详解】（1）当切线的斜率不存在时，直线 $x=2$ 是圆的切线；

（2）当切线斜率存在时，设切线方程为 $l:y-3=k(x-2)$，由 $(0,0)$ 到切线距离为 $d=\frac{|2k-3|}{\sqrt{k^2+1}}=2$ 得 $k=\frac{5}{12}$，此时切线方程为 $y-3=\frac{5}{12}(x-2)$ 即 $5x-12y+26=0$.故选：D

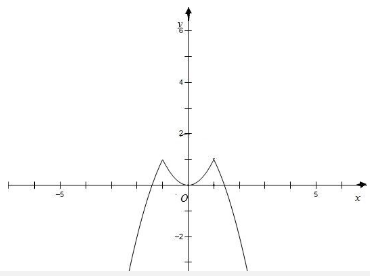
7.【答案】C



【详解】取 BB_1 的中点为 D，连接 CD,ND，因为 $ND\parallel AB_1$，$CD\parallel MB_1$，

所以由面面平行的判定可知，平面 $CND\parallel$ 平面 AB_1M，则点 P 在线段 CD 上，当 $PN\perp CD$ 时，线段 PN 最短，$|ND|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13},|CD|=\sqrt{4^2+3^2}=5,|CN|=\sqrt{4^2-2^3}=2\sqrt{3}$，即 $|CN|^2+|ND|^2=|CD|^2$，$CN\perp ND$，故 $\frac{1}{2}|CN|\cdot|ND|=\frac{1}{2}|CD|\cdot|PN|$，故 $|PN|=\frac{2\sqrt{39}}{5}$ 故选：C

8.【答案】A



【详解】因为$f(x+6)=f(x)$，所以函数的周期为 6，

因此$a=f(2021)=f(336\times 6+5)=f(5)$，

因为$y=f(x+3)$为偶函数，所以$f(x+3)=f(-x+3)\Rightarrow f(x)=f(-x+6)$，

所以$a=f(5)=f(1)\ln e>\ln\sqrt{4}>\ln\sqrt{e}\Rightarrow \frac{1}{2}<\ln 2<1$，因为 $0<\frac{1}{e}<\frac{1}{2}$，所以 $0<e^{-1}<\frac{1}{2}$，所以 $0<e^{-1}<\ln 2<1$，

而若$f(x)$在$(0,3)$内单调递增，所以$b<c<a$，故选：A

9.【答案】ABC

【详解】A：$\cos 82°\sin 52°-\sin 82°\cos 52°=\sin(52°-82°)=\sin(-30°)=-\dfrac{1}{2}$，正确；

B：$\sin 15°\sin 30°\sin 75°=\sin 15°\sin 30°\cos 15°=\dfrac{1}{2}\sin^2 30°=\dfrac{1}{8}$，正确；

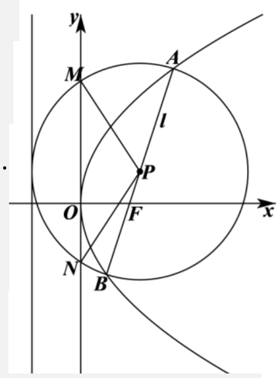
C：$\cos^2 15°-\sin^2 15°=\cos 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，正确.D：$\dfrac{\tan 48°+\tan 72°}{1-\tan 48°\tan 72°}=\tan(48°+72°)=\tan(120°)=-\sqrt{3}$，错误；故选：ABC

10.【答案】ABD

【详解】对于 A，因为$f'(x)>1$，所以$f(x)$为增函数，故 A 正确；

对于 B，由$g(x)=f(x)-x$，$g'(x)=f'(x)-1>0$，所以$g(x)$为增函数，故 B 正确；对于 C，$f(3)=4$，则$f(2x-1)>4$等价于$f(2x-1)>f(3)$，又$f(x)$为增函数，所以$2x-1>3$，解得$x>2$，所以$f(2x-1)>4$的解集为$(2,+\infty)$，故 C 错误；对于 D，$f(2x-1)>2x$等价于$f(2x-1)-(2x-1)>1=f(3)-3$，即$g(2x-1)>g(3)$，又$g(x)$为增函数，所以$2x-1>3$，解得$x>2$，所以$f(2x-1)>2x$的解集为$(2,+\infty)$，故 D 正确；故选：ABD.

11.【答案】BD



【详解】若直线$l\perp y$轴，则直线l与抛物线$y^2=2px(p>0)$有且只有一个交点，不合乎题意.

设点$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，设直线AB的方程为$x=my+\frac{p}{2}$，联立$\begin{cases}y^2=2px\\ x=my+\frac{p}{2}\end{cases}$，整理可得$y^2-2pmy-p^2=0$，$\Delta=4m^2p^2+4p^2>0$，由韦达定理可得$y_1+y_2=2pm$，$y_1y_2=-p^2$，$x_1x_2=\frac{y_1^2}{2p}\cdot\frac{y_2^2}{2p}=\frac{p^4}{4p^2}=\frac{p^2}{4}$，$\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=-p^2+\frac{p^2}{4}=-\frac{3}{4}p^2$，B 正确；

$$|AF|\cdot|BF|=\left(x_1+\frac{p}{2}\right)\left(x_2+\frac{p}{2}\right)=(my_1+p)(my_2+p)=m^2y_1y_2+mp(y_1+y_2)+p^2$$

$=-m^2p^2+2m^2p^2+p^2=(m^2+1)p^2=4p^2$，解得$m=\pm\sqrt{3}$，

所以，直线AB的斜率为$\frac{1}{m}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，A 错误；抛物线上一点$E(2,t)$到焦点的距离为 3，则 $2+\frac{p}{2}=3$，可得$p=2$，故抛物线方程：$y^2=4x$，C 错误；

抛物线的焦点F到准线的距离为 2，则$p=2$，所以，抛物线的方程为$y^2=4x$，

所以，$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$，$x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2=4m^2+2$，

所以，圆P的直径为 $2r=|AB|=x_1+x_2+2=4m^2+4$，则$r=2m^2+2$，点P到y轴的距离为$d=\frac{x_1+x_2}{2}=2m^2+1$，

$\therefore \sin\angle PMN=\frac{d}{r}=\frac{2m^2+1}{2m^2+2}=\frac{2m^2+2-1}{2m^2+2}=1-\frac{1}{2m^2+2}$，$\because 2m^2+2\geq 2$，$\therefore \frac{1}{2m^2+2}\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$，$\therefore \sin\angle PMN\in\left[\frac{1}{2},1\right)$，

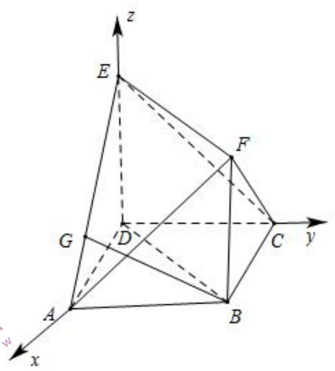
即$(\sin\angle PMN)_{\min}=\frac{1}{2}$，D 正确.故选：BD.

12.【答案】ABD

【详解】因为$BDEF$是矩形，所以$DE\perp DB$，又因为矩形$BDEF$所在平面与正方形$ABCD$所在平面互相垂直，矩形$BDEF$所在平面与正方形$ABCD$相交于BD，所以$DE\perp$平面$ABCD$，而$AD,DC\subset$平面$ABCD$，

所以$DE\perp AD,DC\perp DE$，而$ABCD$是正方形，所以$AD\perp DC$，因此建立如下图所示的空间直角坐标系，

则有$A(4,0,0),B(4,4,0),C(0,4,0),E(0,0,4),F(4,4,4)$，



因为$\overrightarrow{AE}=(-4,0,4),\overrightarrow{CF}=(4,0,4)$，

所以有$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CF}=-16+16=0\Rightarrow\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{CF}$，因此选项 B 正确；

当G为线段AE的中点时，$G(2,0,2)$，$\overrightarrow{GB}=(2,4,-2)$，$\overrightarrow{CE}=(0,-4,4)$，

设平面CEF的法向量为$\overrightarrow{m}=(x,y,z)$，

于是有$\begin{cases}\overrightarrow{m}\perp\overrightarrow{CF}\\\overrightarrow{m}\perp\overrightarrow{CF}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{CF}=0\\\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{CF}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4y+4z=0\\4x+4z=0\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{m}=(1,-1,-1)$，

因为$\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{m}=2\times1+4\times(-1)+(-2)\times(-1)=0,GB\not\subset$平面$CEF$，

所以选项 A 正确；

设$G=(x_1,y_1,z_1)$，$(x_1-4,y_1,z_1)=\lambda(-4,0,4)(\lambda\in[0,1])\Rightarrow G(4-4\lambda,0,4\lambda)$，

BG^2+CG^2有最小值 44，因此选项 C 不正确，

$\overrightarrow{CB}=(4,0,0)$，$\cos\langle\overrightarrow{CB},\overrightarrow{m}\rangle=\frac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{m}}{|\overrightarrow{CB}|\cdot|\overrightarrow{m}|}=\frac{4}{4\times\sqrt{1+1+1}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以点 B 到平面 CEF 的距离为$\left|\overrightarrow{CB}\right|\cdot\cos\langle\overrightarrow{CB},\overrightarrow{m}\rangle=4\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，因选项 D 正确；故选：ABD

13.【答案】560

【详解】二项式$\left(x-\frac{2}{x}\right)^7$的展开式的通项公式为$C_7^r\cdot x^{7-r}\cdot\left(-\frac{2}{x}\right)^r=(-2)^r\cdot C_7^r\cdot x^{7-2r}$，令

$7-2r=-1\Rightarrow r=4$，所以$\left(x-\frac{2}{x}\right)^7$的展开式中$\frac{1}{x}$的系数为$(-2)^4\cdot C_7^4=16\times35=560$

14.【答案】$\frac{3}{4}$

【解析】解：$a>0$，$b>1$且$a+b=2\Rightarrow b-1>0$且$a+(b-1)=1$

$\therefore\frac{9}{a}+\frac{1}{b-1}=\left(\frac{9}{a}+\frac{1}{b-1}\right)\left[a+(b-1)\right]=10+\frac{9(b-1)}{a}+\frac{a}{b-1}\geq10+6=16$当且仅当$\frac{9(b-1)}{a}=\frac{a}{b-1}$取等号，又

$a+b=2$，即 $a=\frac{3}{4}$，$b=\frac{5}{4}$时取等号

15.【答案】3

【详解】$f^{'}(x)=(x-c)(3x-c)$因为若函数 $f\left(x\right)=x\left(x-c\right)^2$ 在 $x=3$处有极小值，所以 $f^{'}(3)=(3-c)(9-c)=0$，解得 $c=3$或$c=9$，

（1）当$c=3$时，$f^{'}(x)=(x-3)(3x-3)$，当$x>3$时，$f'(x)>0$，当$1<x<3$时，$f'(x)<0$，则函数$f(x)$在$x=3$处取得极小值

（2）当$c=9$时，$f^{'}(x)=(x-9)(3x-9)$，当$3<x<9$时，$f'(x)<0$，当$x<3$时，$f'(x)>0$，则函数$f(x)$在$x=3$处取得极大值，综上，$c=3$.

16.【答案】$\sqrt{5}$.

【详解】不妨设点M在第二象限，设$M(m,n)$，$F_2(c,0)$，

由D为MF_2的中点，O、I、D三点共线知直线OD垂直平分MF_2，则$OD: y=\frac{1}{a}x$，

故有$\frac{n}{m-c}=-a$，且$\frac{1}{2}\cdot n=\frac{1}{a}\cdot\frac{m+c}{2}$，解得$m=\frac{a^2-1}{c}$，$n=\frac{2a}{c}$，将$M\left(\frac{a^2-1}{c},\frac{2a}{c}\right)$，即$\left(\frac{2a^2-c^2}{c},\frac{2a}{c}\right)$，代入双曲线的方程可得

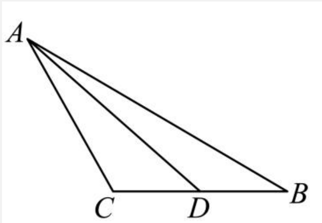
$\frac{(2a^2-c^2)^2}{a^2c^2}-\frac{4a^2}{c^2}=1$，化简可得$c^2=5a^2$，即$e=\sqrt{5}$，当点$M$在第三象限时，同理可得$e=\sqrt{5}$.

17.【答案】(1)$B=\frac{\pi}{6}$　(2)选①$AD=\sqrt{7}$；选②，$AD=\frac{\sqrt{21}}{2}$

【详解】（1）依题意$c=2b\cos B$，$C=\frac{2\pi}{3}$，由正弦定理得 $\sin C=2\sin B\cos B$，$\sin 2B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，...............2 分

由于 $0<B<\frac{\pi}{3}, 0<2B<\frac{2\pi}{3}$，所以 $2B=\frac{\pi}{3}, B=\frac{\pi}{6}$.　...............4 分

（2）如图所示，设D为BC的中点，则AD为BC边上的中线.



若选①.，由（1）知$A=\frac{\pi}{6}$，

设$BC=AC=2x$，由$C=\frac{2\pi}{3}$，得 $\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{4x^2+4x^2-AB^2}{2\cdot 2x\cdot 2x}$，则$AB=2\sqrt{3}x$，故周长为$(4+2\sqrt{3})x=4+2\sqrt{3}$，解得$x=1$　.从而　BC=AC=2,

AB=2$\sqrt{3}$　...............8 分

.则在$\triangle ABD$中，由余弦定理得 $\cos B=\frac{AB^2+BD^2-AD^2}{2AB\cdot BD}=\frac{12+1-AD^2}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

解得$AD=\sqrt{7}$.　..............10 分

若选②，已知$S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，得$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}b^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，即$b=\sqrt{3}$，则$CD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，　...............7 分

在△ ACD中，由余弦定理得$AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cdot\cos C=3+\frac{3}{4}-2\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{21}{4}$,

$\therefore AD=\frac{\sqrt{21}}{2}$.因此$BC$边上的中线长为$\frac{\sqrt{21}}{2}$. ....10 分

18.【答案】（1） $a_n=n+1$ （2） $\left(-\infty,\frac{1}{16}\right]$

（1）由题意可得 $\begin{cases}11a_1+\frac{11\times10}{2}d=77\\(a_1+5d-1)^2=(a_1+d)(a_1+10d)\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a_1+5d=7,\\(7-4d)\cdot(7+5d)=36\end{cases}$ 又因为 $d>0$，所以 $\begin{cases}a_1=2,\\d=1.\end{cases}$ ....3 分

所以 $a_n=n+1$. ....4 分

（2）$\because \frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$，$\therefore T_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}=\frac{n}{2(n+2)}$. ....7 分

$\because$存在 $n\in N^*$，使得 $T_n-\lambda a_{n+1}\geq0$ 成立．$\therefore$存在 $n\in N^*$，使得 $\frac{n}{2(n+2)}-\lambda(n+2)\geq0$ 成立．即存在 $n\in N^*$，使得 $\lambda\leq\frac{n}{2(n+2)^2}$ 成立. ....8 分

$\because \frac{n}{2(n+2)^2}=\frac{1}{2\left(n+\frac{4}{n}+4\right)}\leq\frac{1}{2(4+4)}=\frac{1}{16}$（当且仅当 $n=2$ 时取等号）. $\therefore \lambda\leq\frac{1}{16}$，即实数 λ 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{1}{16}\right]$.

...............12 分

19.【答案】（1）证明见解析；（2） $\frac{2\sqrt{2}}{3}$；（3）存在，$\frac{A_1F}{A_1C}=\frac{3}{4}$.

【详解】（1）因为在$\triangle ABC$中，D，E分别为AB，AC的中点，所以$DE//BC$，$AD=AE$.所以$A_1D=A_1E$，又O为DE的中点，所以$A_1O\perp DE$.因为平面$A_1DE\perp$平面$BCED$，且$A_1O\subset$平面A_1DE，所以$A_1O\perp$平面$BCED$，所以$A_1O\perp BD$. ....4 分

（2）取BC的中点G，连接OG，所以$OE\perp OG$.由（1）得$A_1O\perp OE$，$A_1O\perp OG$.

如图建立空间直角坐标系$O-xyz$.由题意得，$A_1(0,0,2)$，$B(2,-2,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,-1,0)$.所以$\overrightarrow{A_1B}=(2,-2,-2)$，$\overrightarrow{A_1D}=(0,-1,-2)$，$\overrightarrow{A_1C}=(2,2,-2)$.设平面$A_1BD$的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$.则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1D}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x-2y-2z=0,\\-y-2z=0.\end{cases}$ 令$x=1$，则$y=2$，$z=-1$，所以$\vec{n}=(1,2,-1)$. ....6 分

设直线 A_1C 和平面 A_1BD 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{A_1C}\right\rangle\right|=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{A_1C}\right|}=\frac{|2+4+2|}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{4+4+4}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. ………….7 分

故所求角的正弦值 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. ……………8 分

（3）线段 A_1C 上存在点 F 适合题意.

设 $\overrightarrow{A_1F}=\lambda\overrightarrow{A_1C}$，其中 $\lambda\in[0,1]$.设 $F(x_1,y_1,z_1)$，则有 $(x_1,y_1,z_1-2)=(2\lambda,2\lambda,-2\lambda)$，

所以 $x_1=2\lambda$，$y_1=2\lambda$，$z_1=2-2\lambda$，从而 $F(2\lambda,2\lambda,2-2\lambda)$，所以 $\overrightarrow{DF}=(2\lambda,2\lambda+1,2-2\lambda)$，又 $\overrightarrow{BC}=(0,4,0)$，所以

$\left|\cos\left\langle\overrightarrow{DF},\overrightarrow{BC}\right\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\overrightarrow{DF}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{4|2\lambda+1|}{4\sqrt{(2\lambda)^2+(2\lambda+1)^2+(2-2\lambda)^2}}$ ……………10 分

令 $\frac{|2\lambda+1|}{\sqrt{(2\lambda)^2+(2\lambda+1)^2+(2-2\lambda)^2}}=\frac{\sqrt{35}}{7}$，整理得 $16\lambda^2-24\lambda+9=0$.解得 $\lambda=\frac{3}{4}$.所以线段 A_1C 上存在点 F 适合题意，且 $\frac{A_1F}{A_1C}=\frac{3}{4}$. ……………12 分

20.【答案】(1)$\hat{y}=0.625x+2.325$；(2)分布列见解析，期望为$\frac{105}{56}$.

解：（1）$\overline{x}=\frac{2+3+4+5+6+8+9+11}{8}=6$，$\overline{y}=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}y_i=\frac{48.6}{8}=6.075$，$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}=\frac{334.1-8\times6\times6.075}{356-8\times36}=0.625$，

又因为$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$，所以$\hat{a}=6.075-0.625\times6=2.325$， ……………4 分

所以年收入的附加额y与投入额x的线性回归方程为
$\hat{y}=0.625x+2.325$. ……………5 分

（2）8 个投入额中，“优秀投资额”的个数为 5 个，故X的所有可能取值为 0，1，2，3， ……………6 分

$P(X=0)=\frac{C_3^3}{C_8^3}=\frac{1}{56}$；$P(X=1)=\frac{C_3^2C_5^1}{C_8^3}=\frac{15}{56}$；$P(X=2)=\frac{C_3^1C_5^2}{C_8^3}=\frac{30}{56}$；$P(X=3)=\frac{C_5^3}{C_8^3}=\frac{10}{56}$

则X的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{28}$

……………10 分

$E(X)=1\times\frac{15}{56}+2\times\frac{30}{56}+3\times\frac{10}{56}=\frac{105}{56}$. …………..12 分

21.【答案】(1)$\frac{x^2}{2}+y^2=1$　　(2)证明见解析，$\frac{1}{2}$

【详解】（1）过F_1且斜率为$\frac{\sqrt{2}}{4}$的直线的方程为$y=\frac{\sqrt{2}}{4}(x+1)$， …………..1 分

令$x=1$，得$y=\frac{\sqrt{2}}{2}$，由题意可得$\begin{cases}a^2-b^2=1\\ \frac{1}{a^2}+\frac{1}{2b^2}=1\end{cases}$， …………..2 分

解得$a^2=2$，$b^2=1$. ∴椭圆 E 的方程为：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$；　　..............4 分

（2）由题意知，直线 BC 的斜率存在，设直线 BC：$y=kx+2$，

$D(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，联立$\begin{cases}y=kx+2\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$，得$(1+2k^2)x^2+8kx+6=0$.

$\therefore x_1+x_2=\frac{-8k}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{6}{1+2k^2}$，由$\Delta=16k^2-24>0$，得$k^2>\frac{3}{2}$，

$\therefore y_1+y_2=k(x_1+x_2)+4=\frac{4}{1+2k^2}$，$y_1y_2=(kx_1+2)(kx_2+2)=k^2x_1x_2+2k(x_1+x_2)+4=\frac{4-2k^2}{1+2k^2}$，

直线 AD 的方程为$y=\frac{y_1+1}{x_1}x-1$，令$y=0$，解得$x=\frac{x_1}{1+y_1}$，则$H(\frac{x_1}{1+y_1},0)$，同理可得$G(\frac{x_2}{1+y_2},0)$，　..............8 分

$$\therefore S_{\triangle ABG}\cdot S_{\triangle AOH}=\frac{1}{2}\times3\times\left|\frac{x_2}{1+y_2}\right|\times\frac{1}{2}\times1\times\left|\frac{x_1}{1+y_1}\right|=\frac{3}{4}\left|\frac{x_1x_2}{(1+y_1)(1+y_2)}\right|$$

$=\frac{3}{4}\left|\frac{x_1x_2}{1+y_1+y_2+y_1y_2}\right|=\frac{3}{4}\left|\frac{\frac{6}{1+2k^2}}{1+\frac{4}{1+2k^2}+\frac{4-2k^2}{1+2k^2}}\right|=\frac{3}{4}\left|\frac{6}{1+2k^2+4+4-2k^2}\right|=\frac{3}{4}\times\frac{6}{9}=\frac{1}{2}$.　　..............12 分

22. 【答案】(1)$a\geq1$(2)答案见解析

【详解】（1）$F(x)=\frac{1}{g(\sin(x-1))}-f(x)=\frac{\sin(x-1)}{a}-\ln x$在区间$(0,1)$上单调递减，

即$F'(x)=\frac{\cos(x-1)}{a}-\frac{1}{x}\leq0$ 在$(0,1)$上恒成立，即$a\geq x\cos(x-1)$在$(0,1)$上恒成立.　　..............1 分

令$\varphi(x)=x\cos(x-1)$，$\varphi'(x)=\cos(x-1)-x\sin(x-1)$，当$x\in(0,1)$时，$\cos(x-1)>0$，$\sin(x-1)<0$，
所以$\varphi(x)>0$，即$\varphi(x)$在$(0,1)$上单调递增，　所以当$x\in(0,1)$时，$\varphi(x)<\varphi(1)=1$，所以$a\geq1$　　..............5 分

（2）$a=1$ 时，$F(x)=\sin(x-1)-\ln x>F(1)=0$，所以 $\sin(x-1)>\ln x$，即 $\sin(1-x)<\ln\frac{1}{x}$，$x\in(0,1)$.

..............7 分

令$x=\frac{k}{k+1}$得 $\sin\left(1-\frac{k}{1+k}\right)=\sin\frac{1}{k+1}<\ln\frac{k+1}{k}$，　　..............8 分

所以 $\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{3}+\cdots+\sin\frac{1}{n+1}<\ln2+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)$，

即$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{1}{k+1}<\ln(n+1)$，$n,k\in\mathrm{N}^*$.　　..............12 分