

数学(三)

一、选择题

1. D 【解析】由 $x(x-2) < 3$ 得 $x^2 - 2x - 3 < 0$, 解得 $A = \{x | -1 < x < 3\}$, 由 $\frac{5}{x+1} \geq 1$ 得 $\frac{5}{x+1} - 1 \geq 0$, 即 $\frac{4-x}{x+1} \geq 0$, 即 $(4-x)(x+1) \geq 0$ 且 $x+1 \neq 0$, 解得 $B = \{x | -1 < x \leq 4\}$, 所以 $A \cup B = \{x | -1 < x \leq 4\}$. 故选 D 项.

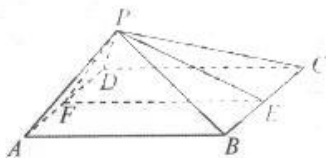
2. C 【解析】设 $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$, 则 $\frac{z}{1+i} = \frac{a+bi}{1+i} = \frac{(a+bi)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{a-b+bi+bi}{2} = \frac{a-b}{2} + \frac{b-a}{2}i$, 因为复数 $\frac{z}{1+i}$ 为纯虚数, 所以 $\begin{cases} \frac{a-b}{2} = 0, \\ \frac{b-a}{2} \neq 0. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = b, \\ a \neq b. \end{cases}$ 又 $|\frac{z}{1+i}| = 1$, 所以 $\frac{b-a}{2} = 1$ 或 $\frac{b-a}{2} = -1$, 解得 $b = 1$ 或 $b = -1$, 所以 $z = -1+i$ 或 $z = 1-i$. 故选 C 项.

3. C 【解析】由题意得 $e = \frac{c}{a} = 2$, 即 $c = 2a$, 又 $c^2 = a^2 + b^2$, 所以 $b^2 = 3a^2$, 设点 A 在 x 轴上方, 则 $A(c, \frac{b^2}{a})$, 又 $\frac{b^2}{a} = 3a$, 所以 $|AF| = 3a$, $|MF| = a + c = 3a$, 因为 $\angle AFM = 90^\circ$, 所以 $\angle AMF = 45^\circ$, 所以 $\angle AMB = 90^\circ$. 故选 C 项.

4. C 【解析】由题知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 又 $f(-x) = \frac{\sin(-4x)}{1+3^{|-x|}} = -\frac{\sin 4x}{1+3^{|x|}} = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 为奇函数, 排除 A, B 项; $f(1) = \frac{\sin 4}{4} < 0$, 排除 D 项. 故选 C 项.

5. B 【解析】若事件 A_1 为“第一次抽到卡片中奖”, 事件 A_2 为“第二次抽到卡片中奖”, 则 $P(A_1 A_2) = \frac{C_2^1 C_1^1}{C_6^2 C_5^1} = \frac{1}{15}$, $P(A_1) = \frac{C_2^1}{C_6^1} = \frac{1}{3}$, 故 $P(A_2 | A_1) = \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)} = \frac{1}{5}$. 故选 B 项.

6. A 【解析】如图, 由 $AB \parallel CD$, 得 $\angle PCD$ 为异面直线 AB 与 PC 所成的角或其补角, 设 E, F 分别为 BC, AD 的中点, 连接 PE, PF, EF, 由底面 ABCD 为正方形, $\triangle PBC$ 为等边三角形, 得 $PE \perp BC$, $FE \perp BC$, 所以 $\angle PEF = 30^\circ$. 设 $AB = 2$, 则 $PE = \sqrt{3}$, 由余弦定理得 $PF = 1$, 又 $PF \perp AD$, $FD = 1$, 所以 $PD = \sqrt{2}$, 又 $PC = CD = 2$, 所以 $\cos \angle PCD = \frac{4+4-2}{2 \times 2 \times 2} = \frac{3}{4}$. 故选 A 项.



7. D 【解析】由题意知 $\angle AEB$ 是向量 $\overrightarrow{AE}$ 与向量 $\overrightarrow{BD}$ 的夹角, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AE} = (-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}) \cdot (\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{4}(-\overrightarrow{AB}^2 - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}^2) = \frac{3}{4}$, $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC})^2} = \sqrt{3}$, $|\overrightarrow{AE}| =$

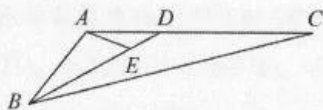
• 12 •





$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}, \text{ 则 } \cos \angle AEB =$$

$$\frac{\vec{BD} \cdot \vec{AE}}{|\vec{BD}| |\vec{AE}|} = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{\sqrt{21}}{7}, \text{ 故选 D 项.}$$



8. A 【解析】因为 $f'(x) > 2x$, 所以 $f'(x) - 2x > 0$, 构造函数 $F(x) = f(x) - x^2$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $F'(x) = f'(x) - 2x > 0$, $F(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递增, 且 $F(2) = 0$, 又 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 所以 $F(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 所以 $F(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内单调递减, 且 $F(-2) = 0$. 不等式 $xf(x-1) + 2x^2 > x^3 + x$ 整理得 $xf(x-1) + 2x^2 - x^3 - x > 0$, 即 $x[f(x-1) - (x-1)^2] > 0$, 当 $x > 0$ 时, $f(x-1) - (x-1)^2 > 0$, 则 $x-1 > 2$, 解得 $x > 3$; 当 $x < 0$ 时, $f(x-1) - (x-1)^2 < 0$, 则 $-2 < x-1 < 0$, 解得 $-1 < x < 1$, 又 $x < 0$, 所以 $-1 < x < 0$. 综上, 不等式 $xf(x-1) + 2x^2 > x^3 + x$ 的解集为 $(-1, 0) \cup (3, +\infty)$, 故选 A 项.

二、选择题

9. BCD 【解析】由题得 $\bar{x} = 3, \bar{y} = 411.08$, 代入可得 $\hat{b} = 149.24$, A 项错误; 2023 年的年份代码为 i , 代入 $\hat{y} = 149.24x - 33.64$ 得 $\hat{y} = 1\,011.04$, 高于 1 000 万辆, B 项正确; C 项显然正确; 将 $x = 5$, 代入 $\hat{y} = 149.24x - 33.64$ 得 $\hat{y} = 712.56$, 相应的残差为 $784 - 712.56 = 71.44$, D 项正确, 故选 BCD 项.

10. ACD 【解析】圆心 C_k 的坐标为 $(k, \sqrt{3}k)$, 在直线 $y = \sqrt{3}x$ 上, A 项正确; 若圆 O 与圆 C_k 有公共点, 则 $1 \leq |OC_k| \leq 3$, 所以 $1 \leq \sqrt{k^2 + 3k^2} \leq 3$, 解得 $-\frac{3}{2} \leq k \leq \frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{3}{2}$, B 项错误; 将圆 O 与圆 C_k 的方程作差可得公共弦所在直线的方程为 $2kx + 2\sqrt{3}ky - 4k^2 + 3 = 0$, 则圆心 O 到直线的距离 $d = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}$, 则 $d = \frac{|-4k^2 + 3|}{\sqrt{(2k)^2 + (2\sqrt{3}k)^2}} = \frac{1}{4}$, 解得 $k = \pm \frac{3}{4}$ 或 $k = \pm 1$, C 项正确; 当 $k = \pm \frac{3}{2}$ 时, 圆 O 与圆 C_k 外切, 圆心距为 3, 半径差为 1, 则外公切线长为 $\sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$, D 项正确. 故选 ACD 项.

11. AB 【解析】令 $f(x) = 0$, 则 $\sin(\omega x + \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以

$$\omega x + \varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \text{ 或 } \omega x + \varphi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{解得 } x = \frac{\frac{\pi}{4} - \varphi + 2k\pi}{\omega}, k \in \mathbf{Z} \text{ 或 } x = \frac{\frac{3\pi}{4} - \varphi + 2k\pi}{\omega}, k \in \mathbf{Z},$$

所以 $f(x)$ 的图像与 x 轴相邻两个交点之间的最小距离为 $\frac{\pi}{2\omega}$, 所以 $\frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{4}$, 解得 $\omega = 2$, 所以

$$f(x) = 2\sin(2x + \varphi) - \sqrt{2}, \text{ 所以 } f(x) \text{ 的周期 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi, \text{ 当 } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 时, } 2x + \varphi \in (-\pi + \varphi,$$

$$\pi + \varphi), \text{ 令 } f(x) = 0, \text{ 即 } \sin(2x + \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 又 } 0 < \varphi <$$

$$\pi, \text{ 所以 } 2x + \varphi = \frac{\pi}{4} \text{ 或 } 2x + \varphi = \frac{3\pi}{4}, \text{ 所以 } x = \frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{2}$$

$$\text{或 } x = \frac{3\pi}{8} - \frac{\varphi}{2}, \text{ 由 } \frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{2} + \frac{3\pi}{8} - \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{3} \text{ 得 } \varphi =$$

$$\frac{\pi}{6}, \text{ 所以 } f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{2}, f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 -$$

$$\sqrt{2}, \text{ A 项正确; 由 } -\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}, \text{ 得 } -\frac{\pi}{6} < 2x +$$

$$\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } f(x) \text{ 在区间 } \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) \text{ 内单调递增,}$$

$$\text{B 项正确; } f\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = -\sqrt{3} - \sqrt{2} \neq -\sqrt{2}, \text{ 所以 } f(x)$$

$$\text{的图像不关于点 } \left(-\frac{5\pi}{12}, -\sqrt{2}\right) \text{ 对称, C 项错误;}$$

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3} - \sqrt{2} \neq \pm 2 - \sqrt{2}, \text{ 所以 } f(x) \text{ 的图像不}$$

$$\text{关于直线 } x = \frac{\pi}{12} \text{ 对称, D 项错误. 故选 AB 项.}$$

12. ABD 【解析】由题意得 $F\left(0, \frac{p}{2}\right), B\left(4, \frac{8}{p}\right)$, 所

$$\text{以 } k_{AB} = \frac{\frac{8}{p} - \frac{p}{2}}{4} = \frac{3}{4}, \text{ 整理得 } p^2 + 6p - 16 = 0, \text{ 又}$$

$$p > 0, \text{ 解得 } p = 2, \text{ 所以 } C \text{ 的方程为 } x^2 = 4y, \text{ A 项正}$$

$$\text{确; 准线方程为 } y = -1, B(4, 4), F(0, 1), \text{ 直线 } l_1 \text{ 的}$$

$$\text{方程为 } y = \frac{3}{4}x + 1, \text{ 与 } x^2 = 4y \text{ 联立解得 } x = -1 \text{ 或}$$

$$x = 4, \text{ 所以 } A\left(-1, \frac{1}{4}\right), \text{ 则 } |AB| =$$

$$\sqrt{(4+1)^2 + \left(4 - \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{25}{4}, \text{ B 项正确; 设点}$$

$$M\left(m, \frac{m^2}{4}\right), \text{ 由题意知 } m \neq \pm 1 \text{ 且 } m \neq \pm 4, \text{ 所以直}$$



高考模拟调研卷

线 $MA: y - \frac{1}{4} = \frac{m-1}{4}(x+1)$, 令 $y = -1$, 得 $x = -\frac{m+4}{m-1}$, 即 $E\left(-\frac{m+4}{m-1}, -1\right)$, 所以 $|NE| = \left|\frac{m+4}{m-1}\right|$, 同理可得 $D\left(\frac{4m-4}{m+4}, -1\right)$, $|ND| = \left|\frac{4m-4}{m+4}\right|$, 所以 $|ND| \cdot |NE| = \left|\frac{4m-4}{m+4}\right| \cdot \left|\frac{m+4}{m-1}\right| = 4$, D 项正确; 当 $m=2$ 时, $E(-6, -1)$, $D\left(\frac{2}{3}, -1\right)$, 所以 $|AE| = \frac{5\sqrt{17}}{4}$, $|BD| = \frac{5\sqrt{13}}{3}$, 则 $|BD| > |AE|$, C 项错误. 故选 ABD 项.

三、填空题

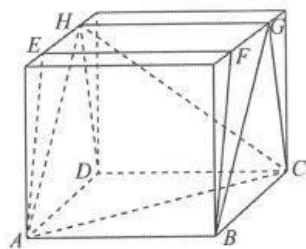
13. $\frac{1}{5}$ 【解析】由 $\log_5 3 = \frac{2}{x}$, 得 $x = \frac{2}{\log_5 3} = 2 \log_3 5 = \log_3 25$, 则 $3^x \times 27^{-\frac{x}{2}} = 3^{\log_3 25} \times 3^{-\frac{3}{2} \log_3 25} = 25 \times 25^{-\frac{3}{2}} = 25^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}$.

14. 1 (答案不唯一) 【解析】 $(x - \sqrt{x})^2 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}\right)^n = (x^2 - 2x\sqrt{x} + x) \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}\right)^n$, $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}\right)^n$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1} = C_n^r (\sqrt{x})^{n-r} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^r = C_n^r x^{\frac{n-r}{2}-2r}$, 取 $n=4, r=1$, 得 $T_2 = C_4^1 x^{-1} = \frac{4}{x}$, 可得 $(x - \sqrt{x})^2 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}\right)^n$ 的展开式的常数项为 $x \cdot \frac{4}{x} = 4$, 所以 n 的一个值可以是 4.

15. 9 【解析】由题知 $a_1 a_2 = 2$, 则 $a_n a_{n+1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$, 所以 $a_{n+1} a_{n+2} = 2^{n+1}$, 所以 $\frac{a_{n+2}}{a_n} = 2$, 所以数列 $\{a_{2n-1}\}$ 是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列, 数列 $\{a_{2n}\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列, 则 $S_{2n+1} = (a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}) = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} + \frac{2 \times (1-2^n)}{1-2} = 2^{n+2} - 3$, $a_{2n} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$, 那么 $\frac{S_{2n+1}+2}{4a_{2n}} = \frac{2^{n+2}-1}{4 \times 2^n} = 1 - \frac{1}{2^{n+2}}$, 因为 $\frac{S_{2n+1}+2}{4a_{2n}} > \frac{x-1}{x}$ 对任意 $x \in (0, 2.023]$ 恒成立, 则只需 $1 - \frac{1}{2^{n+2}} > \left(\frac{x-1}{x}\right)_{\max}$ 即可, 令 $f(x) = \frac{x-1}{x}$, 则 $f(x)$ 在区间 $(0, 2.023]$ 上单调递增, 所以 $f(x)_{\max} = \frac{2.022}{2.023}$, 所以 $1 - \frac{1}{2^{n+2}} > \frac{2.022}{2.023}$, 即 $\frac{1}{2^{n+2}} < \frac{1}{2.023}$, 即

$2^{n+2} > 2.023$, 解得 $n \geq 9$, 又 $n \in \mathbb{N}^*$, 所以 n 的最小值为 9. 来源: 高三答案公众号

16. $\frac{13\sqrt{33}}{165}$ 【解析】如图, 把此六面体补成正方体, 连接 AH, AC , 由题可知 $AH \parallel BG$, 所以 $\angle AHC$ 是异面直线 BG 与 CH 所成角或其补角, 在 $\triangle AHC$ 中, $AH = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $CH = \sqrt{1^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{33}$, $AC = 4\sqrt{2}$, 则 $\cos \angle AHC = \frac{AH^2 + CH^2 - AC^2}{2 \times AH \times CH} = \frac{25 + 33 - 32}{2 \times 5 \times \sqrt{33}} = \frac{13\sqrt{33}}{165}$.



四、解答题

17. 解: (1) 因为 $a_1 = 20$, 且 $20 - 3 \times 6 = 2 > 0$, $20 - 3 \times 7 = -1 < 0$,

所以当 $n \leq 7$ 时, $a_n - 1 = a_{n-1} - 3$,

此时 $\{a_n\}$ 是以 26 为首项, -3 为公差的等差数列,

则 $a_n - 20 - 3 \times (n-1) = 23 - 3n$; (3 分)

当 $n \geq 8$ 时, $a_8 = |a_7 - 3| = |2 - 3| = 1$, $a_9 = |a_8 - 3| = |1 - 3| = 2$, $a_{10} = |a_9 - 3| = |2 - 3| = 1$, $a_{11} = |a_{10} - 3| = |1 - 3| = 2, \dots$, 可得数列 $\{a_n\}$ 是个摆动数列,

则 $a_n = \frac{3 + (-1)^{n-1}}{2}$. (4 分)

综上, $a_n = \begin{cases} 23 - 3n, & n \leq 7, \\ \frac{3 + (-1)^{n-1}}{2}, & n \geq 8. \end{cases}$ (5 分)

(2) 当 $n \leq 7$ 时, $S_n = \frac{(20 + 23 - 3n)n}{2} = \frac{43n - 3n^2}{2}$; (6 分)

当 $n \geq 8$, 且 n 为奇数时, $S_n = S_7 + 1 \times \frac{n-7}{2} + 2 \times \frac{n-7}{2} = 77 + \frac{3n-21}{2} = \frac{3n+133}{2}$,

当 $n \geq 8$, 且 n 为偶数时, $S_n = S_{n-1} + a_n = \frac{3(n-1)+133}{2} + 1 = \frac{3n+132}{2}$,



数学·辽宁名校联盟

参考答案及解析

$$\text{所以 } S_n = \frac{3n}{2} + \frac{265 + (-1)^{n-1}}{4}, \quad (9 \text{ 分})$$

$$\text{综上, } S_n = \begin{cases} \frac{43n - 3n^2}{2}, & n \leq 7, \\ \frac{3n}{2} + \frac{265 + (-1)^{n-1}}{4}, & n \geq 8. \end{cases} \quad (10 \text{ 分})$$

18. 解: (1) 在 $\triangle ABD$ 中, 因为 $DB = \sqrt{3}$, $DA = 2$, $\angle DAB = 60^\circ$,

$$\text{由余弦定理得 } (\sqrt{3})^2 = 2^2 + AB^2 - 2 \times 2 \times AB \cos 60^\circ, \text{ 解得 } AB = 1, \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{由 } AB^2 + DB^2 = DA^2, \text{ 得 } AB \perp DB, \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{此时 } \text{Rt}\triangle CDB \cong \text{Rt}\triangle ABD, \text{ 可得 } \angle ABC = 120^\circ. \quad (4 \text{ 分})$$

在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 1$, $BC = 2$,

$$\text{由余弦定理得 } AC^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \times \cos 120^\circ = 7, \text{ 解得 } AC = \sqrt{7}, \quad (5 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } \cos \angle ACB = \frac{2^2 + 7 - 1^2}{2 \times 2 \times \sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{14}. \quad (6 \text{ 分})$$

(2) 设 $\angle ADB = \theta$, 由题意可知 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理得 $AB^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{3} \cos \theta = 7 - 4\sqrt{3} \cos \theta$, 在 $\triangle ACD$ 中,

$\angle ADC = \theta + \frac{\pi}{2}$, 由余弦定理得 $AC^2 = 2^2 + 1^2 - 2 \times$

$$2 \times 1 \times \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = 5 + 4 \sin \theta, \quad (9 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } AB^2 + BC^2 + AC^2 = 7 - 4\sqrt{3} \cos \theta + 5 + 4 \sin \theta + 2^2 = 16 + 8 \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right), \quad (10 \text{ 分})$$

$$\text{因为 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{所以 } -\frac{\pi}{3} < \theta - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } AB^2 + BC^2 + AC^2 \text{ 的取值范围是 } (16 - 4\sqrt{3}, 20). \quad (12 \text{ 分})$$

19. 解: (1) 设 A 小区方案一满意度平均分为 $\bar{x}$,

$$\text{则 } \bar{x} = (45 \times 0.006 + 55 \times 0.014 + 65 \times 0.018 + 75 \times 0.032 + 85 \times 0.020 + 95 \times 0.010) \times 10 = 72.6, \quad (1 \text{ 分})$$

设 B 小区方案二满意度平均分为 $\bar{y}$,

$$\text{则 } \bar{y} = (45 \times 0.005 + 55 \times 0.005 + 65 \times 0.010 + 75 \times 0.040 + 85 \times 0.030 + 95 \times 0.010) \times 10 = 76.5, \quad (2 \text{ 分})$$

因为 $72.6 < 76.5$,

所以方案二的垃圾分类推行措施更受居民欢迎. (4 分)

(2) 因为前 4 组的频率之和为 $0.06 + 0.14 + 0.18 + 0.32 = 0.7 < 0.8$,

前 5 组的频率之和为 $0.06 + 0.14 + 0.18 + 0.32 + 0.2 = 0.9 > 0.8$,

所以第 80 百分位数在第 5 组, (6 分)

设第 80 百分位数为 x , 则 $0.7 + (x - 80) \times 0.020 = 0.8$, 解得 $x = 85$,

所以 A 小区满意度得分的第 80 百分位数为 85 分. (8 分)

(3) 由题意可知方案二中, 满意度不低于 70 分的频率为 0.8, 低于 70 分的频率为 0.2, 现从 B 小区内

随机抽取 5 个人, 则 $X \sim B\left(5, \frac{4}{5}\right)$, (9 分)

X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 4, 5,

$$P(X=0) = C_5^0 \left(\frac{1}{5}\right)^5 = \frac{1}{3125},$$

$$P(X=1) = C_5^1 \left(\frac{4}{5}\right)^4 \left(\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{625},$$

$$P(X=2) = C_5^2 \left(\frac{4}{5}\right)^3 \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{32}{625},$$

$$P(X=3) = C_5^3 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{128}{625},$$

$$P(X=4) = C_5^4 \left(\frac{4}{5}\right)^1 \left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{256}{625},$$

$$P(X=5) = C_5^5 \left(\frac{4}{5}\right)^5 = \frac{1024}{3125}, \quad (11 \text{ 分})$$

X 的分布列为

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{3125}$	$\frac{4}{625}$	$\frac{32}{625}$	$\frac{128}{625}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{1024}{3125}$

$$\text{由二项分布知 } E(X) = 5 \times \frac{4}{5} = 4. \quad (12 \text{ 分})$$

20. (1) 证明: 连接 AF 交 PC 于点 N',

因为 $PA \parallel CF$, $PA = 2CF$, 所以 $\frac{PN'}{N'C} = \frac{PA}{CF} = 2$,

又 $PN = 2NC$, 则点 N' 与点 N 重合, 所以 $AN = 2NF$, (2 分)

同理, 连接 AE 交 DB 于点 M, 得 $AM = 2ME$,

所以 $MN \parallel EF$, (3 分)

又 $MN \subset \text{平面 } PEF$, $EF \subset \text{平面 } PEF$,

所以 $MN \parallel \text{平面 } PEF$. (4 分)



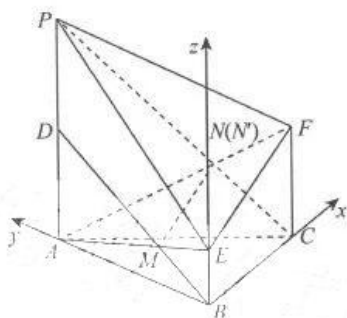
高考模拟调研卷

(2) 解: 由题意可知 $PE = \sqrt{AB^2 + \left(\frac{3}{4}PA\right)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, $EF = \sqrt{BC^2 + \left(\frac{1}{2}CF\right)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$,
在 $\triangle PEF$ 中, $PF^2 = PE^2 + EF^2 - 2PE \times EF \times \cos \angle PEF = 13 + 5 - 2 \times \sqrt{13} \times \sqrt{5} \times \frac{3\sqrt{65}}{65} = 12$,

$$AC^2 = PF^2 - \left(\frac{1}{2}PA\right)^2 = 8,$$

所以 $AC^2 = AB^2 + BC^2$, 所以 $AB \perp BC$. (6分)

以 B 为坐标原点, BC, BA, BE 所在的直线分别为 x, y, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,



所以 $P(0, 2, 4), E(0, 0, 1), F(2, 0, 2), C(2, 0, 0)$.

$$\overrightarrow{PC} = (2, -2, -4), \overrightarrow{EF} = (2, 0, 1), \overrightarrow{EP} = (0, 2, 3),$$

(7分)

设平面 PEF 的法向量为 $n = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} \overrightarrow{EF} \cdot n = 2x + z = 0, \\ \overrightarrow{EP} \cdot n = 2y + 3z = 0, \end{cases} \text{不妨取 } x=1, \text{ 则 } y=3, z=-2, \text{ 即 } n=(1, 3, -2),$$

(10分)

设直线 PC 与平面 PEF 所成的角为 θ .

$$\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{PC}, n \rangle| = \frac{|\overrightarrow{PC} \cdot n|}{|\overrightarrow{PC}| |n|} = \frac{|2 \times 1 + (-2) \times 3 + (-4) \times (-2)|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-4)^2} \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{2\sqrt{6} \times \sqrt{14}} = \frac{\sqrt{21}}{21}.$$

所以直线 PC 与平面 PEF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{21}$. (12分)

$$21. \text{ 解: (1) 由题意知 } \begin{cases} a^2 + b^2 = 7, \\ -\frac{b}{c} = -\sqrt{3}, \end{cases} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{又 } a^2 = b^2 + c^2, \text{ 解得 } a=2, b=\sqrt{3}, c=1, \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1. \quad (4 \text{ 分})$$

(2) 由题得 $F(1, 0)$, 当直线 l 的斜率不为 0 时, 设直线 l 的方程为 $x = my + 1, P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), M(x, y)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} x = my + 1, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases} \text{ 得 } (3m^2 + 4)y^2 + 6my - 9 = 0,$$

$$\text{由根与系数的关系可得 } y_1 + y_2 = -\frac{6m}{3m^2 + 4},$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = m(y_1 + y_2) + 2 = \frac{8}{3m^2 + 4}, \quad (6 \text{ 分})$$

因为 $\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{FP}$, 所以 $(x - x_2, y - y_2) = (x_1 - 1, y_1 - 0)$, 即 $x - x_2 = x_1 - 1, y - y_2 = y_1 - 0$,

$$\text{即 } x = x_1 + x_2 - 1 = \frac{8}{3m^2 + 4} - 1 = \frac{4 - 3m^2}{3m^2 + 4}, y = y_1 +$$

$$y_2 = -\frac{6m}{3m^2 + 4}, \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{又 } x^2 = \frac{16 - 24m^2 + 9m^4}{(3m^2 + 4)^2} = 1 - \frac{48m^2}{(3m^2 + 4)^2} = 1 -$$

$$\frac{(-6m)^2}{4(3m^2 + 4)^2} = 1 - \frac{y^2}{\frac{3}{4}}, \text{ 即 } x^2 + \frac{y^2}{\frac{3}{4}} = 1,$$

则点 M 是以 $(-\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, 0)$ 为焦点, 长轴长为 2 的椭圆上的点. (10分)

当直线 l 的斜率为 0 时, l 与 C 相交于 $P(-2, 0), Q(2, 0)$ 或 $P(2, 0), Q(-2, 0)$. 因为 $\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{FP}$, 则点 M 为 $(-1, 0)$.

此时点 M 也是以 $(-\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, 0)$ 为焦点, 长轴长为 2 的椭圆上的点, (11分)

所以存在两个定点分别为 $(-\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, 0)$, 点 M 到这两个定点的距离之和为定值 2. (12分)

$$22. (1) \text{ 解: 由题得 } f'(x) = e^x (\cos x - \sin x) = \sqrt{2} e^x \cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right), \quad (1 \text{ 分})$$

当 $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 时,

$f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{4})$ 内单调递增, 在

区间 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 内单调递减, (3分)

$$\text{所以 } f(x) \text{ 的极大值为 } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}}. \quad (4 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 证明: } F(x) = \frac{af(x)}{e^x} - \frac{1}{x} = a \cos x - \frac{1}{x} = \frac{\arccos x - 1}{x},$$

数学·辽宁名校联盟

参考答案及解析

设 $h(x) = a \cos x - 1$,
 则 $h'(x) = -a \sin x$, (5分)
 令 $\varphi(x) = \cos x - x \sin x$,
 则 $\varphi'(x) = -\sin x - x \cos x < 0$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$),
 所以 $\varphi(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调递减. (6分)
 又 $\varphi(0) = 1 > 0$, $\varphi(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < 0$,
 故存在 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使得 $\varphi(x_0) = 0$,
 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $\varphi(x) > 0$, 即 $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在区
 间 $(0, x_0)$ 内单调递增; 当 $x \in (x_0, \frac{\pi}{2})$ 时, $\varphi(x) <$

0, 即 $h'(x) < 0$, $h(x)$ 在区间 $(x_0, \frac{\pi}{2})$ 内单调递减.
 (8分)
 又 $h(0) = -1 < 0$, $h(\frac{\pi}{2}) = -1 < 0$,
 因为 $a > \frac{4\sqrt{2}}{\pi}$, 所以 $h(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}a - 1 > \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{4\sqrt{2}}{\pi} - 1 = 0$, (10分)
 所以 $h(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{4})$, $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 内各有一个零
 点, 即 $F(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内有且仅有两个零点.
 (14分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站(网址: www.zizzs.com)和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主选拔在线**官方微信号: **zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线