

2023 年湖北省孝感市高二 1 月期末考试

高二数学试卷

命题学校：安陆一中 命题教师：陈汉荣 邓保定 郭斌 审题学校：安陆一中

考试时间：2023 年 1 月 7 日下午 15:00-17:00

试卷满分：150 分

注意事项：

- 1、答卷前，考生务必将自己的姓名、考号等填写在答题卡和试卷指定的位置上。
- 2、回答选择题时，选出每题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需要改动，先用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在试卷上无效。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知空间向量 $\vec{a} = (-1, 2, -1)$, $\vec{b} = (x, -1, y)$. 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 ()
A. $x - y = 1$ B. $x + y = 1$ C. $x + y = 0$ D. $x + y = -2$
2. 设不同的直线 $l_1: 2x - my - 1 = 0$, $l_2: (m-1)x - y + 1 = 0$. 则 “ $m=2$ ” 是 “ $l_1 \parallel l_2$ ” 的 ()
A. 充要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分不必要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 将字母 a, b, c 分别填入标号为 a, b, c 的三个方格里，每格填上一个字母，则每个方格的标号与所填的字母均不相同的概率是 ()
A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$
4. 过点 $A(1, -1)$, $B(-1, 1)$, 且圆心在直线 $x + y - 2 = 0$ 上的圆的方程是 ()
A. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$ B. $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 4$
C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ D. $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$
5. 已知直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$, $AB = 2$, $BC = CC_1 = 1$, 则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为 ()
A. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ C. $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ D. $-\frac{\sqrt{15}}{5}$
6. 已知双曲线的渐近线方程为 $y = \pm 2x$, 则双曲线的离心率为 ()
A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 或 $\sqrt{5}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 或 $\sqrt{5}$
7. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 其前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 > 0$, $S_8 = S_{10}$, 则 S_n 中最大的是 ()
A. S_7 B. S_8 C. S_9 D. S_{10}

湖北省孝感市重点高中教科研协作体*数学试卷 (共 4 页) 第 1 页

8. 法国数学家、化学家和物理学家加斯帕尔·蒙日被称为“画法几何之父”，他创立的画法几何学推动了空间解析几何的发展，被广泛应用于工程制图当中. 过椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 外的一点作椭圆的两条切线，若两条切线互相垂直，则该点的轨迹是以椭圆的中心为圆心、以 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 为半径的圆，这个圆叫做椭圆的蒙日圆. 若椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{m} = 1 (0 < m < 4)$ 的蒙日圆为 $E: x^2 + y^2 = 7$ ，过圆 E 上的动点 M 作椭圆 C 的两条切线，分别与圆 E 交于 P, Q 两点，直线 PQ 与椭圆 C 交于 A, B 两点，则下列结论不正确的是 ()

- A. 椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$
 B. M 到 C 的右焦点的距离的最大值为 $\sqrt{7} + 1$
 C. 若动点 N 在 C 上，记直线 AN, BN 的斜率分别为 k_1, k_2 ，则 $k_1 k_2 = -\frac{3}{4}$
 D. $\triangle MPQ$ 面积的最大值为 $\frac{7}{2}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 为递减数列，且 $a_3 = 1, a_2 a_4 = \frac{3}{4}$ ，则下列结论中正确的有 ()
- A. 数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $-\frac{1}{2}$ B. $a_n = -\frac{1}{2}n + \frac{5}{2}$
 C. 数列 $\{a_1 a_n\}$ 是公差为 -1 的等差数列 D. $a_1 a_7 + a_4 = -1$
10. 已知圆 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ ，直线 $l: (2m+1)x + (m+1)y - 7m - 4 = 0$. 则下列命题中正确的有 ()
- A. 直线 l 恒过定点 $(3, 1)$
 B. 圆 C 被 y 轴截得的弦长为 4
 C. 直线 l 与圆 C 恒相离
 D. 直线 l 被圆 C 截得最短弦长时，直线 l 的方程为 $2x - y - 5 = 0$
11. 抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，直线 l 过点 F ，斜率为 $k (k > 0)$ ，且交抛物线 C 于 A, B 两点 (点 A 在 x 轴的下方)，抛物线的准线为 m ， $AA_1 \perp m$ 交 m 于 A_1 ， $BB_1 \perp m$ 交 m 于 B_1 ，点 $E(1, 3)$ ， P 为抛物线 C 上任一点，则下列结论中正确的有 ()
- A. 若 $\overrightarrow{BF} = 3\overrightarrow{FA}$ ，则 $k = \sqrt{3}$ B. $|PE| - |PF|$ 的最小值为 -2
 C. 若 $k = 1$ ，则 $|AB| = 12$ D. $\angle A_1 F B_1 = 90^\circ$

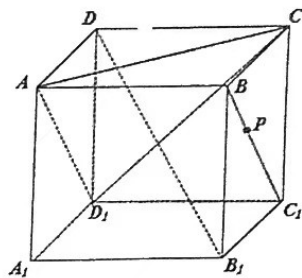
12. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 在线段 BC_1 上运动, 有下列判断, 其中正确的是 ()

A. 平面 $PB_1D \perp$ 平面 ACD_1

B. $A_1P \parallel$ 平面 ACD_1

C. 异面直线 A_1P 与 AD_1 所成角的取值范围是 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right]$

D. 三棱锥 D_1-APC 的体积不变



三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知直线 l 的斜率为 $\frac{1}{6}$, 且和坐标轴围成的三角形的面积为 3, 则直线 l 的方程为_____.

14. 圆 $x^2-4x+y^2=0$ 与圆 $x^2+y^2+4x+3=0$ 的公切线共有_____条.

15. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 点 $\left(n, \frac{S_n}{n}\right) (n \in \mathbb{N}^*)$ 均在函数 $y=3x-2$ 的图象上, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____.

16. 已知椭圆和双曲线有共同的焦点 F_1, F_2 , M 是它们的一个交点, 且 $\cos \angle F_1MF_2 = \frac{1}{4}$, 记椭圆和双曲线的离心率分别为 e_1, e_2 , 则 $-\frac{1}{e_1 e_2}$ 的最大值为_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 已知在某次 1500 米体能测试中, 甲、乙、丙 3 人各自通过测试的概率分别为 $\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}$, 且三人是否通过测试互不影响. 求:

- (1) 3 人都通过体能测试的概率;
(2) 只有 2 人通过体能测试的概率.

18. (12 分) 已知公差大于零的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足: $a_3 a_4 = 117$, $a_2 + a_5 = 22$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n ;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 且 $b_n = \frac{S_n}{n+c}$, 求非零常数 c .

19. (12 分) 已知 AB 为过抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点 F 的弦, M 为 AB 的中点, l 为抛物线的准线, MN 垂直于 l 于 N , 点 $N(-2, -3)$.

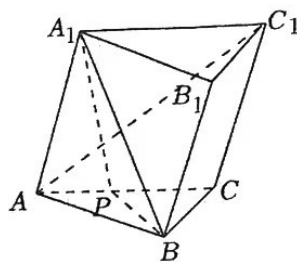
- (1) 求抛物线 C 的方程;
(2) 求 $\triangle AOB$ 的面积 (O 为坐标原点).

20. (12分) 已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AC = AA_1 = 4$, $BC = 2$, $\angle ACB = 90^\circ$, $A_1B \perp AC_1$.

(1) 求证: 平面 $A_1ACC_1 \perp$ 平面 ABC ;

(2) 若 $\angle A_1AC = 60^\circ$, 在线段 AC 上是否存在一点 P 使平面 BA_1P 和平面 A_1ACC_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$?

若存在, 确定点 P 的位置; 若不存在, 说明理由.



21. (12分) 已知圆心在 x 轴上的圆 C 与直线 $l: 4x + 3y - 6 = 0$ 切于点 $M\left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$.

(1) 求圆 C 的标准方程;

(2) 已知 $N(2, 1)$, 经过原点且斜率为正数的直线 l_1 与圆 C 交于 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$.

求 $|PN|^2 + |QN|^2$ 的最大值.

22. (12分) 已知点 $F_1(-1, 0)$, 圆 $F_2: (x-1)^2 + y^2 = 8$, 点 Q 在圆 F_2 上运动, QF_1 的垂直平分线交 QF_2 于点 P .

(1) 求动点 P 的轨迹 C 的方程;

(2) 动点 P 的轨迹 C 与 x 轴交于 A, B 两点 (A 在 B 点左侧), 直线 l 交轨迹 C 于 M, N 两点 (M, N 不在 x 轴上), 直线 AM, BN 的斜率分别为 k_1, k_2 , 且 $k_1 = 2k_2$, 求证: 直线 l 过定点.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线