



## 高三数学考试

## 注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合  $A = \{x | x < 3x - 1\}$ ,  $B = \{x | -1 < x < 3\}$ , 则  $A \cup B =$

A.  $(-1, +\infty)$

B.  $(\frac{1}{2}, 3)$

C.  $(-\infty, 3)$

D.  $(-1, \frac{1}{2})$

2. 若两个复数的实部相等或虚部相等,则称这两个复数为同部复数。已知  $z = (1 - i)^3$ , 则下列复数是  $z$  的同部复数的是

A.  $2 + i$

B.  $3 - 2i$

C.  $4 - i$

D.  $-3 + 2i$

3. 关于  $\theta$ , 甲、乙、丙、丁四人有不同的判断。甲:  $\theta$  是第三象限角。乙:  $\tan \theta = \frac{1}{2}$ 。丙:  $\tan 2\theta > 1$ 。丁:  $\tan(\theta - \pi)$  不小于 2。若这四人只有一人判断错误,则此人是

A. 甲

B. 乙

C. 丙

D. 丁

4. 甲、乙两人进行乒乓球比赛,采用七局四胜制,先赢四局者获胜,没有平局,甲每局赢的概率为  $\frac{1}{2}$ , 已知前两局甲都输了,则甲最后获胜的概率为

A.  $\frac{1}{16}$

B.  $\frac{1}{8}$

C.  $\frac{3}{16}$

D.  $\frac{1}{4}$

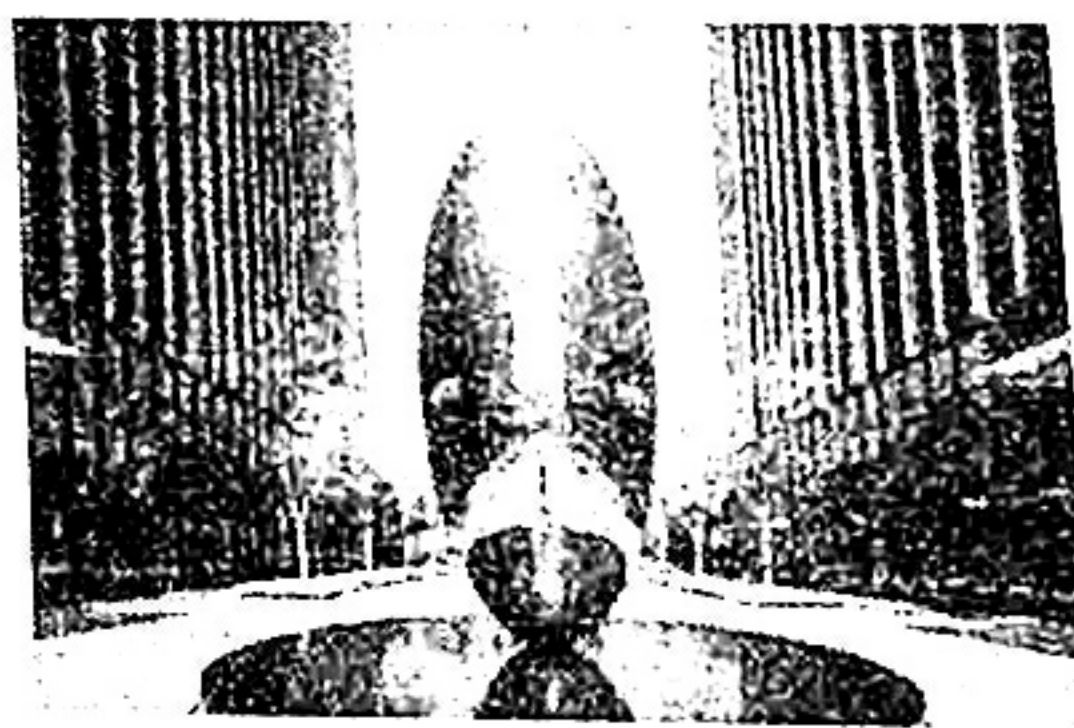
5. 某广场的一个椭球水景雕塑如图所示,其所有横截面均为圆,过横截面圆心的纵截面为椭圆,  $F_1, F_2$  分别为该椭圆的两个焦点,  $PQ$  为该椭圆过点  $F_2$  的一条弦,且  $\triangle PQF_1$  的周长为  $3|F_1F_2|$ 。若该椭球横截面圆的最大直径为 2 米,则该椭球的高为

A.  $\frac{2\sqrt{10}}{3}$  米

B.  $\frac{6\sqrt{5}}{5}$  米

C.  $\frac{8}{3}$  米

D.  $\frac{12}{5}$  米



6. 若函数  $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$  ( $\omega > 0$ ) 在  $[0, \pi]$  内的最小值小于 0, 且最小值点 (即取得最小值时所对应的自变量) 唯一, 则  $\omega$  的取值范围为

- A.  $(\frac{1}{3}, \frac{7}{6})$       B.  $(\frac{2}{3}, \frac{19}{6})$       C.  $(\frac{2}{3}, \frac{7}{6}]$       D.  $(\frac{2}{3}, \frac{19}{6}]$

7. 已知  $f(x)$  为奇函数, 当  $0 \leq x \leq 2$  时,  $f(x) = 2x - x^2$ , 当  $x > 2$  时,  $f(x) = |x - 3| - 1$ , 则

- A.  $-f(-\sqrt{26}) > f(2^{0.3}) > f(3^{0.3})$       B.  $f(2^{0.3}) > f(3^{0.3}) > -f(-\sqrt{26})$   
 C.  $-f(-\sqrt{26}) > f(3^{0.3}) > f(2^{0.3})$       D.  $f(3^{0.3}) > f(2^{0.3}) > -f(-\sqrt{26})$

8. 设  $P$  为抛物线  $C: y^2 = 4x$  上的动点,  $A(2, 4)$  关于  $P$  的对称点为  $B$ , 记  $P$  到直线  $x = -1, x = -3$  的距离分别为  $d_1, d_2$ , 则  $d_1 + d_2 + |AB|$  的最小值为

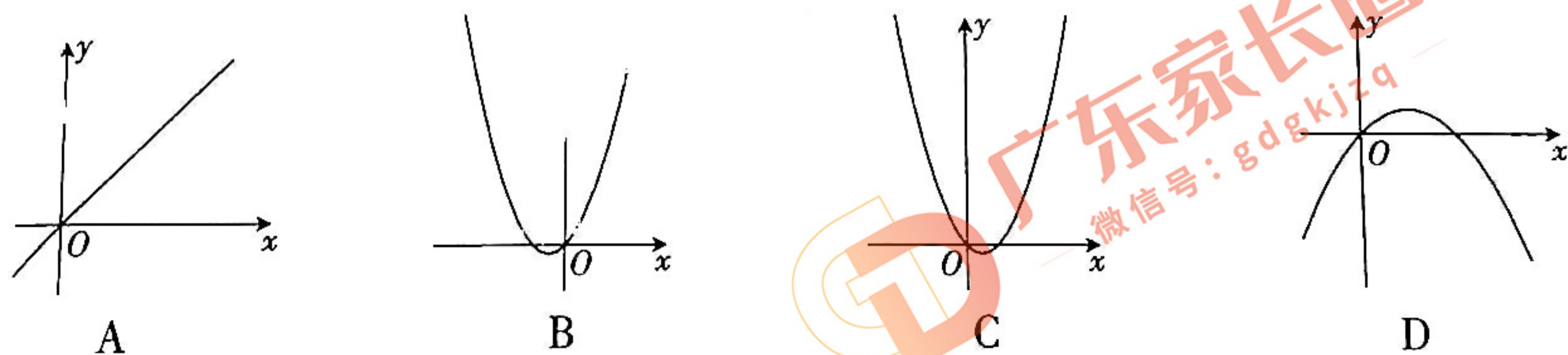
- A.  $2\sqrt{17} + 2$       B.  $2\sqrt{13} + 2$   
 C.  $\sqrt{17} + 2$       D.  $\sqrt{13} + \sqrt{17} + 2$

二、选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 关于  $(xy^2 - \frac{1}{2xy})^6$  的展开式, 下列结论正确的是

- A.  $(xy^2 - \frac{1}{2xy})^6$  的展开式中不含字母  $x$  的项为  $-20y^3$   
 B.  $(xy^2 - \frac{1}{2xy})^6$  的展开式中不含字母  $x$  的项为  $-\frac{5}{2}y^3$   
 C.  $(xy^2 - \frac{1}{2xy})^6$  的展开式中不含字母  $y$  的项为  $\frac{15}{16x^4}$   
 D.  $(xy^2 - \frac{1}{2xy})^6$  的展开式中不含字母  $y$  的项为  $\frac{15}{16x^2}$

10. 已知向量  $\vec{AB} = (ax, -1), \vec{BC} = (x - ax, 1 - x)$ , 则函数  $f(x) = \vec{AB} \cdot \vec{AC}$  的大致图象可能为



11. 若四面体  $ABCD$  的每个顶点都在球  $O$  的球面上,  $AB \perp BC, AB \perp AD, AB = 2, BC = \sqrt{2}, AD = 2$ , 且异面直线  $BC$  与  $AD$  所成角的余弦值为  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ , 则球  $O$  的表面积可能为

- A.  $10\pi$       B.  $12\pi$       C.  $106\pi$       D.  $108\pi$

12. 已知直线  $l$  经过点  $A(-4, -2)$ , 曲线  $\Omega: (x^2 + y^2 - 2)^2 = 4 + 8xy$ . 下列说法正确的是

- A. 当直线  $l$  与曲线  $\Omega$  有 2 个公共点时, 直线  $l$  斜率的取值范围为  $(-\frac{1}{7}, \frac{7}{23}) \cup \{1\}$   
 B. 当直线  $l$  与曲线  $\Omega$  有奇数个公共点时, 直线  $l$  斜率的取值共有 4 个  
 C. 当直线  $l$  与曲线  $\Omega$  有 4 个公共点时, 直线  $l$  斜率的取值范围为  $(\frac{7}{23}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$   
 D. 存在定点  $Q$ , 使得过  $Q$  的任意直线与曲线  $\Omega$  的公共点的个数都不可能为 2

三、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.把答案填在答题卡中的横线上.

13.  $(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{y}})(\sqrt{x} + 4\sqrt{y})$  的最小值为         ▲        .

14. 若  $\lg x = 2\lg y, \lg(x+y) = \lg y - \lg x$ , 则  $y^2 + y^3 =$          ▲        .

15. 在空间直角坐标系中,已知  $A(a^2, 2a, 6), B(0, 0, 1), C(1, 1, 2), D(-1, 0, 3), E(a^2, 0, 5)$ , 则当点  $A$  到平面  $BCD$  的距离最小时,直线  $AE$  与平面  $BCD$  所成角的正弦值为         ▲        .

16. 若存在实数  $a, b(0 < b < 2)$ , 使得关于  $x$  的不等式  $3x^{\frac{2}{3}} \leq ax + b \leq 2x^2 + 2$  对  $x \in (0, +\infty)$  恒成立, 则  $b$  的最大值是         ▲        .

四、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知  $\{a_n\}, \{b_n\}$  分别为等差数列, 等比数列, 且  $a_1 = 1, b_1 = 2, a_3 = 3, b_2 = 4$ .

(1) 求  $\{a_n\}, \{b_n\}$  的通项公式;

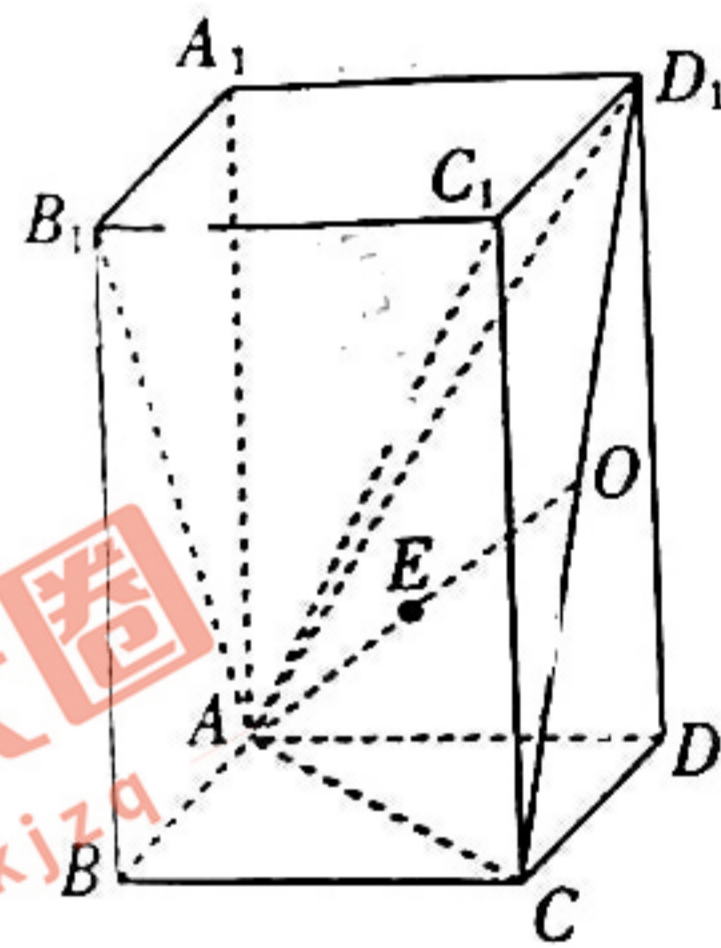
(2) 求数列  $\{a_{2n} + 3b_{2n-1}\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

18. (12 分)

在正四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $O$  为  $CD_1$  的中点, 且点  $E$  既在平面  $AB_1C_1$  内, 又在平面  $ACD_1$  内.

(1) 证明:  $E \in AO$ .

(2) 若  $AA_1 = 4, AB = 2, E$  为  $AO$  的中点,  $E$  在底面  $ABCD$  内的射影为  $H$ , 指出  $H$  所在的位置(需要说明理由), 并求线段  $A_1H$  的长.

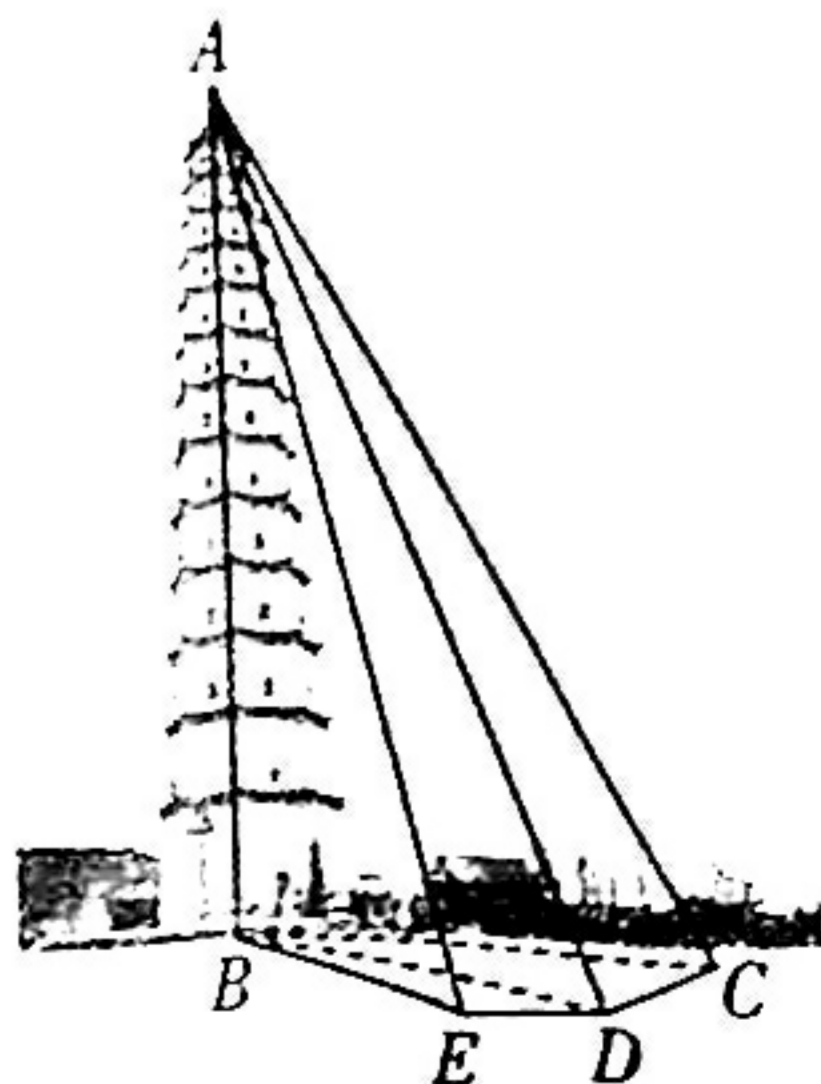


19. (12 分)

汾阳文峰塔建于明末清初, 位于山西省汾阳市城区以东 2 公里的建昌村, 该塔共十三层, 雄伟挺拔, 高度位于中国砖结构古塔之首. 如图, 某测绘小组为了测量汾阳文峰塔的实际高度  $AB$ , 选取了与塔底  $B$  在同一水平面内的三个测量基点  $C, D, E$ , 现测得  $\angle BCD = 30^\circ, \angle BDC = 70^\circ, \angle BED = 120^\circ, BE = 17.2 \text{ m}, DE = 10.32 \text{ m}$ , 在点  $C$  测得塔顶  $A$  的仰角为  $62^\circ$ . 参考数据: 取  $\tan 62^\circ = 1.88, \sin 70^\circ = 0.94, \sqrt{144.9616} = 12.04$ .

(1) 求  $BD$ ;

(2) 求塔高  $AB$  (结果精确到 1 m).

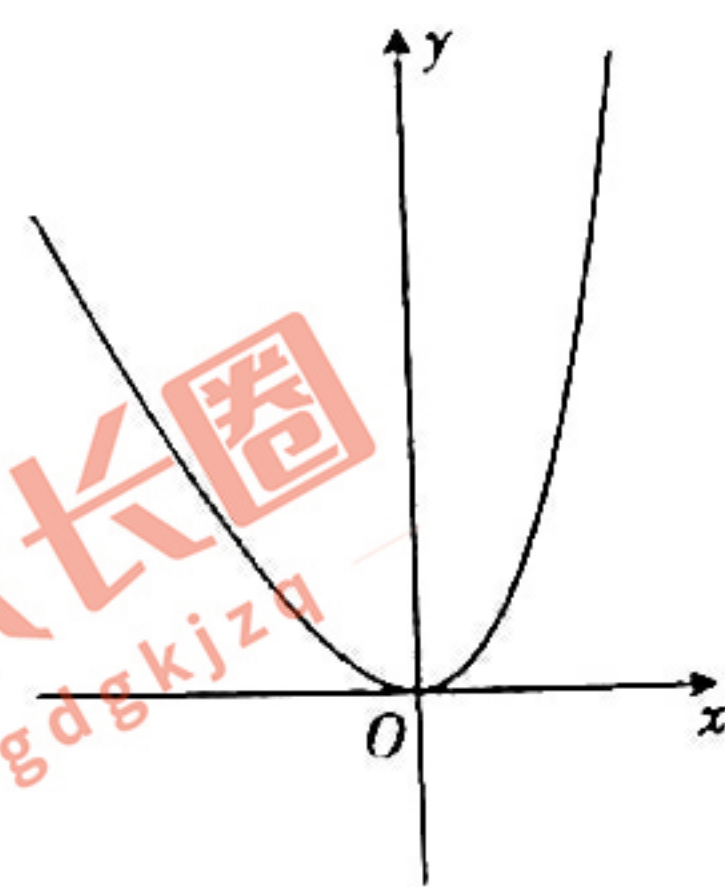


20. (12分)

已知函数  $f(x) = ae^x + bx - 2$  的部分图象如图所示.

(1) 求  $f(x)$  的解析式;

(2) 若  $f(x) + f(2x) > 6x + m$  对  $x \in \mathbf{R}$  恒成立, 求  $m$  的取值范围.



21. (12分)

已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  经过点  $(3, \frac{\sqrt{6}}{2})$ , 右焦点为  $F(c, 0)$ , 且  $c^2, a^2, b^2$  成等差数列.

(1) 求  $C$  的方程;

(2) 过  $F$  的直线与  $C$  的右支交于  $P, Q$  两点 ( $P$  在  $Q$  的上方),  $PQ$  的中点为  $M$ ,  $M$  在直线  $l: x = 2$  上的射影为  $N$ ,  $O$  为坐标原点, 设  $\triangle POQ$  的面积为  $S$ , 直线  $PN, QN$  的斜率分别为  $k_1, k_2$ , 证明:  $\frac{k_1 - k_2}{S}$  是定值.

22. (12分)

为落实食品安全的“两个责任”, 某市的食品药品监督管理局和卫生监督管理部门在市人民政府代表大会召开之际特别邀请相关代表建言献策. 为保证政策制定的公平合理性, 两个部门将首先征求相关专家的意见和建议, 已知专家库中共有 5 位成员, 两个部门分别独立地发出邀请, 邀请的名单从专家库中随机产生, 两个部门均邀请 2 位专家, 收到食品药品监督管理局或卫生监督管理部门的邀请后, 专家如约参加会议.

(1) 设参加会议的专家代表共  $X$  名, 求  $X$  的分布列与数学期望.

(2) 为增强政策的普适性及可行性, 在征求专家建议后, 这两个部门从网络评选出的 100 位热心市民中抽取部分市民作为群众代表开展座谈会, 以便为政策提供支持和补充意见. 已知这两个部门的邀请相互独立, 邀请的名单从这 100 名热心市民中随机产生, 食品药品监督管理局邀请了  $m (m \in \mathbf{N}^*, 2 < m < 100)$  名代表, 卫生监督管理部门邀请了  $n (n \in \mathbf{N}^*, 2 < n < 100)$  名代表, 假设收到食品药品监督管理局或卫生监督管理部门的邀请后, 群众代表如约参加座谈会, 且  $m + n > 100$ , 请利用最大似然估计法估计参加会议的群众代表的人数. (备注: 最大似然估计即最大概率估计, 即当  $P(X = k)$  取值最大时,  $X$  的估计值为  $k$ )