高三文科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A=\{x\mid |x-1|\leqslant 3\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{x-1}\leqslant 1\right\}$，则 $A\cap B=$

A. $[-2,1]\cup[2,4]$　　B. $[0,4]$

C. $[-2,1)\cup[2,4]$　　D. $[0,1)\cup(1,4]$

2. 设复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})z=3+\mathrm{i}$（i 是虚数单位），则 z 的虚部为

A. $2\mathrm{i}$　　B. 2　　C. $-2\mathrm{i}$　　D. -2

3. $(\sqrt{2}-1)(\sin 22.5^\circ+\cos 22.5^\circ)^2=$

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$　　D. $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

4. 若 $a,b\in\mathbf{R}$，则“$\frac{a}{b}>1$”是“$a>b$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 若实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-3\geqslant 0,\\ x-2y+3\geqslant 0,\\ 2x-y-3\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=y-\frac{3}{2}x$ 的最大值是

A. 1　　B. -1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. -2

6. 已知 $2^a=3$，$b=\frac{1}{2}\log_2 10$，$c=2^{1.01}$，则 a,b,c 的大小关系为

A. $c>b>a$　　B. $b>a>c$　　C. $b>c>a$　　D. $c>a>b$

7. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,G 分别为 A_1D_1,C_1D_1 的中点，则直线 A_1G,CE 所成角的余弦值为

A. $\frac{\sqrt{30}}{10}$　　B. $\frac{\sqrt{30}}{15}$　　C. $\frac{4\sqrt{5}}{15}$　　D. $\frac{\sqrt{145}}{15}$

8. 在△ABC中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c,$c=8$,$b=5$,$A=\frac{\pi}{3}$，点D满足$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，则$AD=$

A. $\frac{\sqrt{61}}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{61}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{61}}{6}$　　D. $\frac{\sqrt{61}}{2}$

9. 已知O,A,B三地在同一水平面内，A地在O地正东方向2 km处，B地在O地北偏西30°方向2 km处，某测绘队员在A,B之间的直线公路上任选一点C作为测绘点，用测绘仪进行测绘，O地为一磁场，距离其不超过$\sqrt{3}$ km的范围内会对测绘仪等电子仪器形成干扰，使测量结果不准确，则该测绘队员能够得到准确数据的概率是

A. $1-\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　C. $1-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

10. 已知函数$f(x)=\sin x(\cos x-\sin x)$，则下列说法正确的为

A. $f(x)$的最小正周期为2π

B. $f(x)$的最大值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $f(x)$的图象关于直线$x=-\frac{\pi}{8}$对称

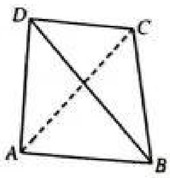
D. 将$f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{8}$个单位长度，再向上平移$\frac{1}{2}$个单位长度后所得图象对应的函数为奇函数

11. 已知双曲线C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点$F$的坐标为$(c,0)$，点$P$在第一象限且在双曲线$C$的一条渐近线上，$O$为坐标原点，若$|OP|=c$,$|PF|=2a$，则双曲线$C$的离心率为

A. $\sqrt{3}$　　B. 2

C. $\sqrt{5}$　　D. 3

12. 如图，在三棱锥$A-BCD$中，$AD=CD=2$,$AB=BC=AC=2\sqrt{2}$，平面$ACD\perp$平面ABC，则三棱锥$A-BCD$外接球的表面积为



A. 12π　　B. $\frac{32}{3}\pi$

C. $\frac{28}{3}\pi$　　D. 8π

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知向量$\boldsymbol{a}=(3,-4)$,$\boldsymbol{b}=(\lambda,7)$，且$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线，则$\lambda=$________.

14. 已知函数$f(x)=e^x-2x+1$，则曲线$y=f(x)$在$x=0$处的切线方程为________.

15. 已知抛物线C:$x^2=2py(p>0)$的焦点为F，过F的直线交C于点A,B，交C的准线于点E，若$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{FA}$,$|BF|=2$，则$p=$________.

16. 若圆C:$x^2+y^2-2x-2y-7=0$关于直线$ax+by+3=0$对称，由点$P(a,b)$向圆C作切线，切点为A，则线段PA的最小值为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共 60 分。

17.（本小题满分 12 分）

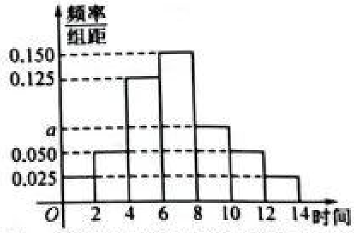
已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n, n\text{ 为奇数},\\ 2a_n, n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

(1)令$b_n=a_{2n}$，求b_1，b_2，b_3及$\{b_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{a_n\}$的前$2n$项和S_{2n}.

18.（本小题满分 12 分）

"学习强国"学习平台是由中宣部主管，以深入学习宣传习近平新时代中国特色社会主义思想为主要内容，立足全体党员，面向全社会的优质平台，现日益成为老百姓了解国家动态，紧跟时代脉搏的热门 APP. 某市宣传部门为了解全民利用"学习强国"了解国家动态的情况，从全市抽取 4000 名人员进行调查，统计他们每周利用"学习强国"的时长，绘制如图所示的频率分布直方图(每周利用"学习强国"的时长均分布在[0,14]).



(1)求实数a的值，并求所有被抽查人员利用"学习强国"的平均时长(同一组数据用该区间的中点值作代表)；

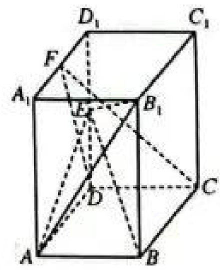
(2)宣传部为了了解大家利用"学习强国"的具体情况，准备采用分层抽样的方法从[8,10)和[10,12)组中抽取 50 人了解情况，则两组各抽取多少人？再利用分层抽样从抽取的 50 人中选 5 人参加一个座谈会，现从参加座谈会的 5 人中随机抽取 2 人发言，求[10,12)组中恰好有 1 人发言的概率.

19.（本小题满分 12 分）

如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AA_1=AD=2AB$，E和F分别是棱DD_1和A_1D_1的中点.

(1)证明：平面$AB_1E\perp$平面CDF；

(2)若$AB=2$，求三棱锥B_1-ABE的体积.



20.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{6}}{3}$,且过点 $\left(-1,\frac{\sqrt{15}}{3}\right)$.

(1)求 E 的方程;

(2)若 $M(3,0)$,O 为坐标原点,点 P 是 E 上位于第一象限的一点,线段 PM 的垂直平分线交 y 轴于点 N,求四边形 $OPMN$ 面积的最小值.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x^3(\ln x-a)(a\in\mathbf{R})$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2)若 $f(x)+ax^3+1\geq ax$,求实数 a 的取值范围.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.(本小题满分 10 分)选修 4-4:坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中,直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-2+\frac{3\sqrt{10}}{10}t,\\ y=\frac{\sqrt{10}}{10}t\end{cases}$ (t 为参数),以 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$,直线 l 与曲线 C 交于不同的两点 A,B.

(1)求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程;

(2)若点 P 为直线 l 与 x 轴的交点,求 $\frac{1}{|PA|^2}+\frac{1}{|PB|^2}$.

23.(本小题满分 10 分)选修 4-5:不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x-2m|-|3x+m|(m>0)$.

(1)当 $m=3$ 时,求不等式 $f(x)\geq 2$ 的解集;

(2)对于任意实数 x,t,不等式 $f(x)<|4+t|+|t-3|$ 恒成立,求实数 m 的取值范围.

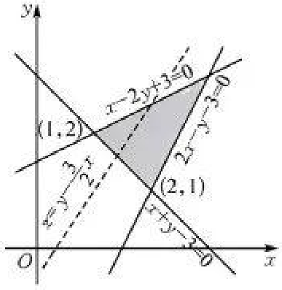
高三文科数学参考答案、提示及评分细则

1. C　$A=\{x\,|\,|x-1|\leqslant 3\}=[-2,4]$，$B=\left\{x\left|\frac{1}{x-1}\leqslant 1\right.\right\}=\left\{x\left|\frac{2-x}{x-1}\leqslant 0\right.\right\}=(-\infty,1)\cup[2,+\infty)$，所以 $A\cap B=[-2,1)\cup[2,4]$. 故选 C.

2. B　因为 $(1-i)z=3+i$，故 $z=\frac{3+i}{1-i}=\frac{(3+i)(1+i)}{(1+i)(1-i)}=1+2i$，则 z 的虚部为 2. 故选 B.

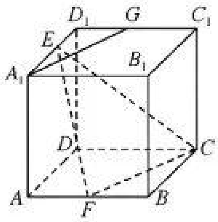
3. A　$(\sqrt{2}-1)(\sin 22.5^\circ+\cos 22.5^\circ)^2=(\sqrt{2}-1)(1+\sin 45^\circ)=(\sqrt{2}-1)\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 A.

4. D　若 $\frac{a}{b}>1$，当 $b>0$ 时，$a>b$，当 $b<0$ 时，$a<b$；又当 $a>b>0$ 时，两边除以 b，得 $\frac{a}{b}>1$，当 $a>b$ 且 $b<0$ 时，两边除以 b，得 $\frac{a}{b}<1$. 故“$\frac{a}{b}>1$”是“$a>b$”的既不充分也不必要条件. 故选 D.



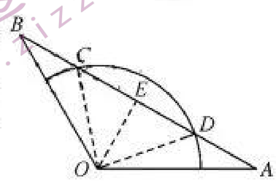
5. C　由题设约束条件可得可行域（图中阴影部分），要使 $z=y-\frac{3}{2}x$ 最大，即其所对应直线在 y 轴上的截距最大，由图知当 $z=y-\frac{3}{2}x$ 过点 $(1,2)$ 时，$z_{max}=2-\frac{3}{2}\times 1=\frac{1}{2}$. 故选 C.

6. A　由 $a=\log_2 3<b=\log_2\sqrt{10}<\log_2\sqrt{16}=2$，$c>2^1=2$，可得 $c>b>a$. 故选 A.



7. C　如图所示，取 AB 的中点 F，连接 EF，CF，易知 $A_1G/\!/CF$，则 $\angle ECF$ 为直线 A_1G 与 CE 所成角或其补角. 不妨设 $AB=2$，则 $CF=\sqrt{5}$，$EF=\sqrt{6}$，$EC=3$，由余弦定理得 $\cos\angle ECF=\frac{9+5-6}{2\times 3\times\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{15}$，即直线 A_1G 与 CE 所成角的余弦值为 $\frac{4\sqrt{5}}{15}$. 故选 C.

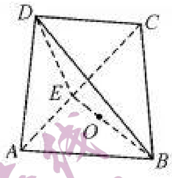
8. B　根据余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $a^2=5^2+8^2-2\times 5\times 8\times\frac{1}{2}=49$，所以 $a=7$. 因为点 D 满足 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，所以 $|\overrightarrow{BD}|=\frac{2}{3}a=\frac{14}{3}$，又 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{49+64-25}{2\times 7\times 8}=\frac{11}{14}$，在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理可得 $AD^2=BD^2+c^2-2BD\cdot c\cdot\cos B=\left(\frac{14}{3}\right)^2+64-2\times\frac{14}{3}\times 8\times\frac{11}{14}=\frac{244}{9}$，所以 $AD=\frac{2\sqrt{61}}{3}$. 故选 B.



9. A　由题意，$\triangle AOB$ 中，$\angle AOB=120^\circ$，$OA=OB=2$，所以 $AB=2\sqrt{3}$. O 地为一磁场，距离其不超过 $\sqrt{3}$ km 的范围为以 O 为圆心，$\sqrt{3}$ 为半径的圆及其内部，该圆与 AB 相交于 C，D 两点，作 $OE\perp AB$，则 $OE=1$，所以 $CD=2\sqrt{2}$，所以该测绘队员能够得到准确数据的概率 $P=1-\frac{CD}{AB}=1-\frac{\sqrt{6}}{3}$. 故选 A.

10. D　$f(x)=\sin x(\cos x-\sin x)=\sin x\cos x-\sin^2 x=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}$，故 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，最大值为 $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$，对称轴方程为 $2x+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$，故 ABC 皆错误，对于选项 D：将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后得到 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)+\frac{\pi}{4}\right]-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}$，然后，将此图象向上平移 $\frac{1}{2}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x$ 的图象，$g(x)$ 是一个奇函数，故 D 正确，故选 D.

11. B　设点 P 的坐标为 $\left(x_0,\frac{b}{a}x_0\right)(x_0>0)$，有 $|OP|=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{b}{a}x_0\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}x_0^2}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x_0^2}=\frac{c}{a}x_0=c$，所以 $x_0=a$，所以点 P 的坐标为 (a,b)，$|PF|=\sqrt{(a-c)^2+b^2}=2a$，即 $(a-c)^2+(c^2-a^2)=4a^2$，整理得 $c^2-ac-2a^2=0$，有 $(c-2a)(c+a)=0$，所以 $c=2a$，所以 $\frac{c}{a}=2$，即 C 的离心率为 2. 故选 B.

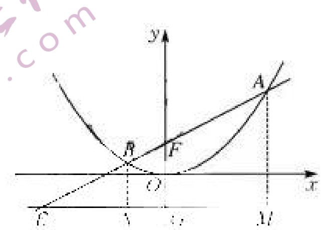


12. B　如图,取 AC 的中点 E,连接 DE,BE,在 BE 上取一点 O,使得 $BO=2EO$,由 $AD=CD=2$,$AC=2\sqrt{2}$,所以 $AD^2+CD^2=AC^2$,所以 $AD\perp CD$,所以 $DE=AE=CE=\sqrt{2}$,$BE=\sqrt{6}$,$BO=\frac{2\sqrt{6}}{3}$,$EO=\frac{\sqrt{6}}{3}$.因为 E 为 AC 的中点,所以 $BE\perp AC$,又平面 $ACD\perp$ 平面 ABC,且平面 $ACD\cap$ 平面 $ABC=AC$,所以 $BE\perp$ 平面 ACD,又 $DE\subset$ 平面 ACD,所以 $BE\perp DE$,所以 $OD=\sqrt{(\sqrt{2})^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$,所以 O 为三棱锥 $A-BCD$ 外接球的球心,所以三棱锥 $A-BCD$ 外接球的半径为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$,则三棱锥 $A-BCD$ 外接球的表面积为 $4\pi\times\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2=\frac{32}{3}\pi$. 故选 B.

13. $-\frac{21}{4}$　由题意得 $-4\times\lambda-3\times7=0$,解得 $\lambda=-\frac{21}{4}$.

14. $x+y-2=0$　$f'(x)=e^x-2$.所以 $f'(0)=1-2=-1$,又 $f(0)=1-0+1=2$,故所求的切线方程为 $y-2=-(x-0)$,即 $x+y-2=0$.

15. 3　过 A,B 分别作准线的垂线,垂足分别为 M,N,准线与 y 轴的交点为 G,则 $|AF|=|AM|$,$|BF|=|BN|$.因为 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{FA}$,所以 $|EF|=|AM|=\frac{1}{2}|AE|$,所以 $\angle AEM=30°$,所以 $|EB|=2|BN|=4$,所以 $|FG|=\frac{1}{2}|EF|=3$,即 $p=3$.



16. $\frac{\sqrt{14}}{2}$　因圆 $x^2+y^2-2x-2y-7=0$ 关于直线 [illegible] 对称,∴圆心 $(1,1)$ 在直线 $ax+by+3=0$ 上,∴$a+b+3=0$,即 $b=-a-3$,点 $P(a,b)$ 向圆所作的切线长为 $\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2-9}=\sqrt{2\left(a+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{2}}\geq\frac{\sqrt{14}}{2}$,当 $a=-\frac{3}{2}$ 时,点 $P(a,b)$ 向圆所作的切线长取得最小值 $\frac{\sqrt{14}}{2}$.

17. 解:(1)由题意得 $a_2=a_1=1$,$a_3=2a_2=2$,$a_4=a_3=2$,$a_5=2a_4=4$,$a_6=a_5=4$, ………………………… 2 分

$b_1=a_2=1$,$b_2=a_4=2$,$b_3=a_6=4$, ………………………… 3 分

当 $n\geq2$ 时,$b_n=a_{2n}=a_{2n-1}=2a_{2n-2}=2b_{n-1}$.

又 $b_1=1$,所以 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项,2 为公比的等比数列, ………………………… 5 分

所以 $b_n=2^{n-1}$. ………………………… 6 分

(2)由(1)知 $a_{2n}=2^{n-1}$,所以 $a_{2n-1}=a_{2n}=2^{n-1}$, ………………………… 8 分

所以 $S_{2n}=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n}=(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})+(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})$

$=(1+2+4+\cdots+2^{n-1})+(1+2+4+\cdots+2^{n-1})=\frac{1-2^n}{1-2}+\frac{1-2^n}{1-2}=2^{n+1}-2$. ………………………… 12 分

18. 解:(1)由题意知,$(0.025+0.050+0.125+0.150+a+0.050+0.025)\times2=1$, ………………………… 2 分

解得 $a=0.075$. ………………………… 3 分

设抽查人员利用“学习强国”的平均时长为 $\bar{x}$,

$\bar{x}=0.05\times1+0.1\times3+0.25\times5+0.3\times7+0.15\times9+0.1\times11+0.05\times13=6.8$. ………………………… 5 分

(2)$[8,10)$ 组的人数为 $4\ 000\times0.15=600$ 人,设抽取的人数为 a,

$[10,12)$ 组的人数为 $4\ 000\times0.1=400$ 人,设抽取的人数为 b,

则 $\frac{a}{600}=\frac{b}{400}=\frac{50}{1\ 000}$,解得 $a=30$,$b=20$,

所以在 $[8,10)$ 和 $[10,12)$ 两组中分别抽取 30 人和 20 人. ………………………… 分

再抽取 5 人,两组分别抽取 3 人和 2 人,将 $[8,10)$ 组中被抽取的人员标记为 A_1,A_2,A_3,

将 $[10,12)$ 中的标记为 B_1,B_2, ………………………… 8 分

设事件 C 表示 $[10,12)$ 组中恰好有 1 人发言,

则抽取的情况如下：$\{A_1,A_2\},\{A_1,A_3\},\{A_1,B_1\},\{A_1,B_2\},\{A_2,A_3\},\{A_2,B_1\},\{A_2,B_2\},\{A_3,B_1\},\{A_3,B_2\}$，$\{B_1,B_2\}$，共 10 种情况，…………10 分

其中在$[10,12)$中恰好抽取 1 人有 6 种，则 $P(C)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$. …………12 分

19.（1）证明：在正方形 AA_1D_1D 中，$AD=DD_1$，$DE=D_1F$，

所以 $\mathrm{Rt}\triangle ADE\cong \mathrm{Rt}\triangle DD_1F$，所以$\angle EAD=\angle FDD_1$. …………2 分

所以$\angle AED+\angle FDD_1=\angle AED+\angle EAD=90°$，

所以 $AE\perp DF$. …………4 分

由长方体的性质知，$CD\perp$平面 ADD_1A_1，因为 $AE\subset$平面 ADD_1A_1，

所以 $CD\perp AE$. …………6 分

又 $CD\cap DF=D$，$CD,DF\subset$平面 CDF，

所以 $AE\perp$平面 CDF. …………7 分

又 $AE\subset$平面 AB_1E，所以平面 $AB_1E\perp$平面 CDF. …………8 分

（2）解：三棱锥 B_1-ABE 的体积 $V=V_{E\text{-}ABB_1}=\frac{1}{3}AD\cdot\frac{1}{2}AB\cdot BB_1=\frac{1}{3}\times4\times\frac{1}{2}\times2\times4=\frac{16}{3}$. …………12 分

20. 解：（1）设 E 的焦距为 $2c$，则$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3},\\ \frac{(-1)^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right)^2}{b^2}=1,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ …………2 分

解得$\begin{cases}a=\sqrt{6},\\ b=\sqrt{2},\\ c=2.\end{cases}$ …………3 分

所以 E 的方程是$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1$. …………4 分

（2）由题意，设 $P(x_0,y_0)(0<y_0<\sqrt{2})$，线段 MP 的中点为 A，则点 A 的坐标为$\left(\frac{x_0+3}{2},\frac{y_0}{2}\right)$，

且直线 MP 的斜率 $k_{PM}=\frac{y_0}{x_0-3}$，故直线 AN 的斜率为 $k_{AN}=-\frac{1}{k_{PM}}=\frac{3-x_0}{y_0}$.

从而直线 AN 的方程为：$y-\frac{y_0}{2}=\frac{3-x_0}{y_0}\left(x-\frac{x_0+3}{2}\right)$. …………6 分

又$\frac{x_0^2}{6}+\frac{y_0^2}{2}=1$，

令 $x=0$，得 $y=\frac{x_0^2+y_0^2-9}{2y_0}$，化简得 $N\left(0,\frac{-2y_0^2-3}{2y_0}\right)$. …………8 分

所以四边形 $OPMN$ 的面积 $S_{OPMN}=S_{\triangle OPM}+S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}\times3\times|y_0|+\frac{1}{2}\times3\times\left|\frac{-2y_0^2-3}{2y_0}\right|$

$=\frac{3}{2}\left(y_0+\frac{2y_0^2+3}{2y_0}\right)=\frac{3}{2}\left(2y_0+\frac{3}{2y_0}\right)\geqslant\frac{3}{2}\times2\sqrt{2y_0\times\frac{3}{2y_0}}=3\sqrt{3}$， …………11 分

当且仅当 $y_0=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 等号成立. 所以四边形 $OPMN$ 面积的最小值为 $3\sqrt{3}$. …………12 分

21. 解：（1）函数 $f(x)$ 的定义域为$(0,+\infty)$，

$f'(x)=3x^2(\ln x-a)+x^2=x^2(3\ln x-3a+1)$. …………2 分

令 $f'(x)>0$，得 $x>e^{a-\frac{1}{3}}$，令 $f'(x)<0$，得 $0<x<e^{a-\frac{1}{3}}$， …………4 分

故函数 $f(x)$ 的增区间为$(e^{a-\frac{1}{3}},+\infty)$，减区间为$(0,e^{a-\frac{1}{3}})$. …………5 分

（2）$f(x)+ax^3+1\geqslant ax$ 即 $x^3\ln x+1\geqslant ax$，所以 $a\leqslant x^2\ln x+\frac{1}{x}$ 恒成立.

令 $g(x)=x^2\ln x+\frac{1}{x}$，则 $g'(x)=2x\ln x+x-\frac{1}{x^2}=x\left(2\ln x+1-\frac{1}{x^3}\right)$. …………7 分

令 $h(x)=2\ln x+1-\frac{1}{x^3}$，则 $h'(x)=\frac{2}{x}+\frac{3}{x^4}>0$，

所以函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. …… 8 分

又 $h(1)=0$，所以当 $0<x<1$ 时，$h(x)<0$；当 $x>1$ 时，$h(x)>0$，

所以当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，…… 10 分

故函数 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=1$，故实数 a 的取值范围为 $(-\infty,1]$. …… 12 分

22. 解：(1) 由直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=-2+\dfrac{3\sqrt{10}}{10}t, \\ y=\dfrac{\sqrt{10}}{10}t \end{cases}$（$t$ 为参数），消去参数 t，得 $x+2=3y$，

即 $x-3y+2=0$. …… 2 分

由 $\rho=2\cos\theta$，得 $\rho^2=2\rho\cos\theta$，将 $\rho^2=x^2+y^2$，$x=\rho\cos\theta$ 代入上式，可得曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2x=0$，即 $(x-1)^2+y^2=1$. …… 4 分

(2) 将 $\begin{cases} x=-2+\dfrac{3\sqrt{10}}{10}t \\ y=\dfrac{\sqrt{10}}{10}t \end{cases}$ 代入曲线 C 的直角坐标方程，

来源：高三答案公众号

整理得：$5t^2-9\sqrt{10}t+40=0$，$\Delta=(-9\sqrt{10})^2-4\times5\times40=10>0$.

设 A,B 两点对应的参数分别为 t_1,t_2，则 $t_1+t_2=\dfrac{9\sqrt{10}}{5}$，$t_1\cdot t_2=8$，所以 t_1 与 t_2 同号，

由参数 t 的几何意义，可得 $|PA|+|PB|=|t_1|+|t_2|=|t_1+t_2|=\dfrac{9\sqrt{10}}{5}$，$|PA|\cdot|PB|=t_1\cdot t_2=8$，

…… 7 分

所以 $\dfrac{1}{|PA|^2}+\dfrac{1}{|PB|^2}=\dfrac{(|PA|+|PB|)^2-2|PA||PB|}{(|PA|\cdot|PB|)^2}=\dfrac{(t_1+t_2)^2-2t_1t_2}{(t_1\cdot t_2)^2}=\dfrac{\left(\dfrac{9\sqrt{10}}{5}\right)^2-2\times8}{8^2}=\dfrac{41}{160}$.

…… 10 分

23. 解：(1) 当 $m=3$ 时，$f(x)=|x-6|-|3x+3|=\begin{cases} 2x+9, x<-1, \\ -4x+3, -1\leqslant x\leqslant 6, \\ -2x-9, x>6. \end{cases}$ …… 2 分

因为 $f(x)\geqslant2$，所以 $\begin{cases} x<-1, \\ 2x+9\geqslant2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -1\leqslant x\leqslant6, \\ -4x+3\geqslant2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x>6, \\ -2x-9\geqslant2, \end{cases}$ …… 4 分

解得 $-\dfrac{7}{2}\leqslant x<-1$ 或 $-1\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{4}$.

所以不等式 $f(x)\geqslant2$ 的解集为 $\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{7}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{4}\right\}$. …… 5 分

(2) 对于任意实数 x,t，不等式 $f(x)<|4+t|+|t-3|$ 恒成立，等价于 $f(x)_{\max}<(|4+t|+|t-3|)_{\min}$.

…… 7 分

因为 $|4+t|+|t-3|\geqslant|(4+t)-(t-3)|=7$，当且仅当 $(4+t)(t-3)\leqslant0$ 时等号成立，

所以 $(|4+t|+|t-3|)_{\min}=7$. …… 8 分

因为 $m>0$，所以 $f(x)=|x-2m|-|3x+m|=\begin{cases} 2x+3m, x<-\dfrac{m}{3}, \\ -4x+m, -\dfrac{m}{3}\leqslant x\leqslant 2m, \\ -2x-3m, x>2m. \end{cases}$

函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\infty,-\dfrac{m}{3}\right)$，单调递减区间为 $\left(-\dfrac{m}{3},+\infty\right)$，

所以当 $x=-\dfrac{m}{3}$ 时，$f(x)_{\max}=f\left(-\dfrac{m}{3}\right)=\dfrac{7m}{3}$. …… 9 分

所以 $\dfrac{7m}{3}<7$，解得 $m<3$，所以 $0<m<3$，

所以实数 m 的取值范围是 $(0,3)$. …… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。