机密★启用前

华大新高考联盟2018届高三1月教学质量测评

文科数学

命题：华中师范大学考试研究院

成绩查询网址：huada. onlyets. com　　微信公众号成绩查询关注：ccnu-testing

本试题卷共4页，23题（含选考题）。全卷满分150分。考试用时120分钟。

★祝考试顺利★

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并将准考证号条形码贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 填空题和解答题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 选考题的作答：先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用2B铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
5. 考试结束后，请将答题卡上交。

第Ⅰ卷

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是满足题目要求的。

1. 设函数 $y=\sqrt{x+1}$ 的定义域为 A，函数 $y=\lg x$ 的定义域为 B，则 $A\cup B$ 等于

A. $(0,+\infty)$　　B. $[-1,+\infty)$

C. $[-1,0)$　　D. $(-\infty,-1]\cup(0,+\infty)$

2. 在复平面内，复数 z 满足 $(1+i)z=4-2i$，则复数 z 对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 抛物线的顶点在坐标原点，开口向上，其准线经过双曲线 $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$ 的一个顶点，则此抛物线的标准方程为

A. $x^2=8y$　　B. $x^2=12y$　　C. $y^2=8x$　　D. $y^2=12x$

4. 设命题 p：向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(0,2)$，则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影为1，命题 q：$x^2<1$ 是 $x<1$ 的必要非充分条件，则下列说法正确的是

A. 命题 $p\vee q$ 是假命题　　B. 命题 $p\wedge q$ 是真命题

C. 命题 $(\neg p)\vee q$ 是真命题　　D. 命题 $p\wedge(\neg q)$ 是真命题

5. 若实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y-1\geqslant0,\\x-3y+3\geqslant0,\\x-y-1\leqslant0,\end{cases}$ 则 $3x+4y$ 的最小值为

A. 3　　B. 2　　C. $\frac{7}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

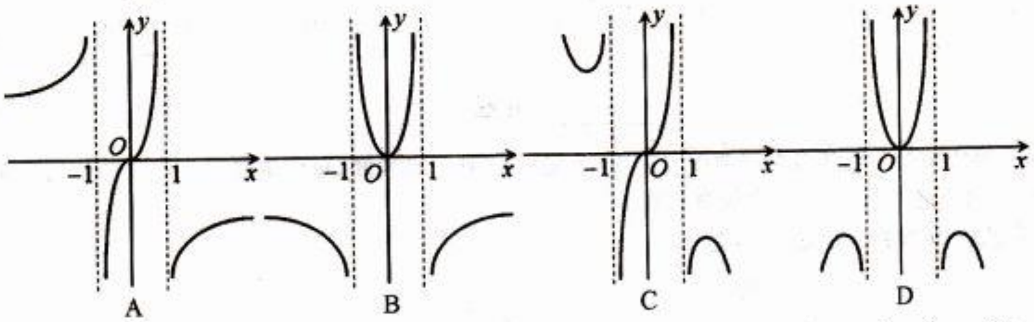
6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2(x+1),\ x\in[0,7],\\ \dfrac{1}{2^x}-3, x\in[-3,0),\end{cases}$ 若在区间$[-3,7]$内随机取一个实数 m，则事件“$f(m)>f(1)$”的概率为

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{7}{10}$　　D. $\frac{9}{10}$

7. 函数 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\cos 2x$ 的一条对称轴的方程可以是

A. $x=-\frac{\pi}{6}$　　B. $x=\frac{11\pi}{12}$　　C. $x=-\frac{2\pi}{3}$　　D. $x=\frac{7\pi}{12}$

8. 函数 $y=\frac{x^3}{1-|x|}$ 的部分图象大致是



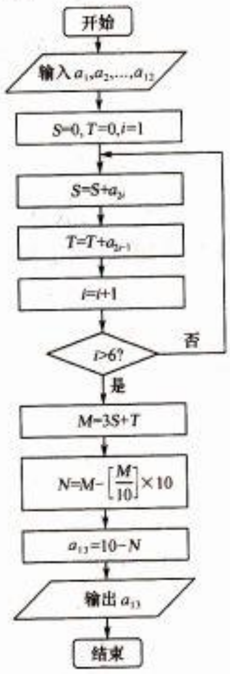
9. 在△ABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 已知向量 $\boldsymbol{m}=(c-3b,a)$，$\boldsymbol{n}=(\cos A,\cos C)$，$\boldsymbol{p}=(0,1)$，若 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$ 且 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{p}$，则 $\frac{a}{b}$ 等于

A. $2\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{7}$　　D. $\sqrt{3}$

10. 超市中的商品条码是由一组规则排列的条、空及其对应的代码组成，用来表示商品信息，我们通常所见的商品条码是“$EAN-13$”通用代码，它是由从左到右排列的 13 个数字（用 $a_1,a_2,\cdots,a_{13}$ 表示）组成，这些数字分别表示前缀部分、制造厂代码、商品代码和校验码，其中 a_{13} 是校验码，用来校验前 12 个数字代码的正确性. 图(1)是计算第 13 位校验码的程序框图，框图中符号$[m]$表示不超过 m 的最大整数（例如$[365.7]=365$）. 现有一商品条形码如图（2）所示（$97a_37040119916$），其中第 3 个数被污损，那么这个被污损数字 a_3 是

A. 4　　B. 5

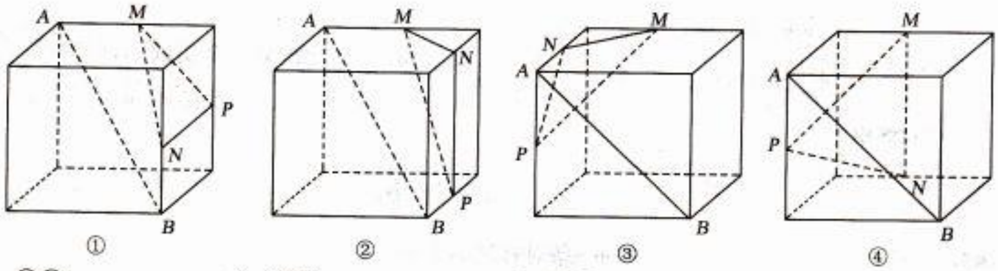
C. 8　　D. 9



图（1）

图（2）

11. 如图所示的四个正方体中，A,B 为正方体的两个顶点，M,N,P 分别为其所在棱的中点，能得出 $AB/\!/$平面 MNP 的图形的序号为



A. ①②　　B. ②③　　C. ③④　　D. ①②③

12. 设函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$，已知集合 $A=\{(x_0,f(x_0))\mid x_0$ 为 $f(x)$ 的极值点$\}$，$B=\left\{(x,y)\mid \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}\leqslant 1\right\}$，若存在实数 φ，使得集合 $A\cap B$ 中恰好有 5 个元素，则 ω 的取值范围是

A. $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi,\frac{5\sqrt{3}}{6}\pi\right)$　　B. $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi,\frac{3\sqrt{3}}{4}\pi\right)$　　C. $\left[\frac{3\sqrt{3}}{4}\pi,\frac{5\sqrt{3}}{6}\pi\right)$　　D. $\left[\frac{3\sqrt{3}}{4}\pi,\frac{11\sqrt{3}}{12}\pi\right)$

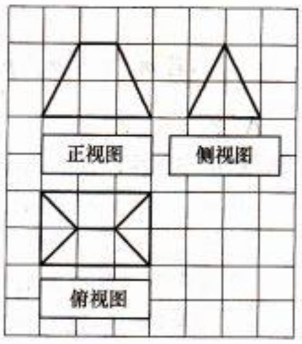
第Ⅱ卷

本卷包括必考题和选考题两部分。第 13 题～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22 题～23 题为选考题，考生根据要求作答。

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若 $2\cos\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$，则 $\tan 2\alpha=$________.

14. “刍甍者，下有袤有广，而上有袤无广，刍，草也，甍，屋盖也”是中国古代数学名著《九章算术》中记载的叫刍甍的一个几何体，如图所示是刍甍的三视图(图中每个小正方形的边长都是 1 个单位)，则该刍甍的体积为________.



15. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线与圆 $(x-4)^2+(y-3)^2=5$ 相切，则此双曲线的离心率为________.

16. 设函数 $f(x)=2x^2e^x-mx+\frac{2}{3}m$($e$ 为自然对数的底数)，当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$f(x)\geqslant 0$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是________.

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 12 分)

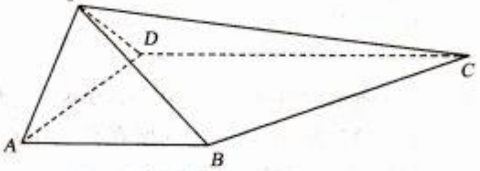
设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $1,a_n,S_n$ 成等差数列($n\in\mathbf{N}^*$).

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $\frac{1}{a_1+a_2}+\frac{1}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n+a_{n+1}}=\frac{f(n)}{a_{n+1}^2}$，当 $f(n)=8$ 时，求 n.

18. (本小题满分 12 分)

如图所示，在四棱锥 P-$ABCD$ 中，$PA=PD=2$，$\angle APD=90°$，底面 $ABCD$ 为梯形，$AB/\!/CD$，$CD=2AB$ 且 $AB\perp$ 平面 PAD.

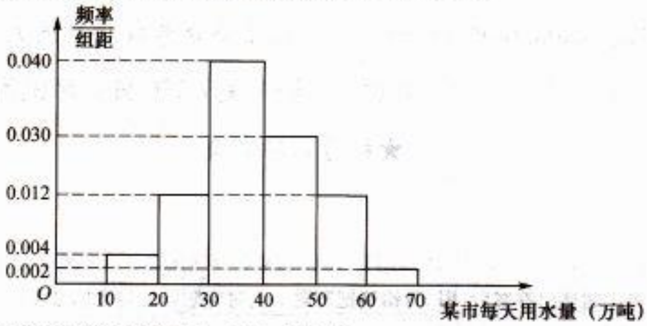


(1) 证明：平面 $PAB\perp$ 平面 PCD；

(2) 当异面直线 PA 与 BC 所成角为 $60°$ 时，求四棱锥 P-$ABCD$ 的体积.

19. (本小题满分 12 分)

某市甲水厂每天生产 45 万吨的生活用水,其每天固定生产成本为 22.5 万元,居民用水的水费价格为每吨 2.5 元. 该市居民每天用水需求量是在$[10,70]$(单位:万吨)内的随机数,经市场调查,该市每天用水需求量的频率分布直方图如图所示,设 x(单位:万吨,$10\leqslant x\leqslant 70$)表示该市一天用水需求量,$f(x)$(单位:万元)表示甲水厂一天销售生活用水的利润(利润=水费收入—固定生产成本). 注:当该市用水需求量超过 45 万吨时,超过的部分居民可以用其他水厂生产的水,甲水厂只收本厂供应水的水费,该市每天用水需求量的概率用频率估计.



(1) 求 $f(40)$,$f(50)$的值,并直接写出 $f(x)$表达式;

(2) 求甲水厂每天的利润不少于 55 万元的概率.

20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为 F,上顶点为 P,O 为坐标原点,椭圆的离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$,且$\triangle PFO$ 的面积为 2.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设线段 PO 的中点为 M,经过 M 的直线 l 与椭圆交于 A,B 两点,$C(-3,0)$,若点 A 关于 x 轴的对称点在直线 BC 上,求直线 l 方程.

21. (本小题满分 12 分)

设函数 $f(x)=ax^2-\ln x$, $g(x)=(a-2)x+1$,$a\in\mathbf{R}$.

(1) 当 $a=3$ 时,证明:$f(x)>g\left(x-\frac{1}{4}\right)$;

(2) 若关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$有且只有一个实根,求实数 a 的取值范围.

请考生在第 22、23 题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分。

22. (本小题满分 10 分)选修 4-4:坐标系与参数方程

直角坐标系 xOy 中,在以 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴的极坐标系中,曲线 C:$\rho(1-\cos2\theta)=2m\cos\theta$(m 为非零常数).

(1) 求曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 若直线 l:$\begin{cases}x=-2+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$($t$ 为参数),l 与曲线 C 相交于 A,B 两点,点 P 的坐标为$(-2,-1)$,当$|PA|\cdot|PB|=22$ 时,求实数 m 的值.

23. (本小题满分 10 分)选修 4-5:不等式选讲

已知函数 $f(x)=|2x+1|-|x|+1$.

(1) 求不等式 $f(x)\geqslant 1$ 的解集;

(2) 若$\exists x_0\in\mathbf{R}$,使不等式 $f(x_0)\leqslant f(m^2)-2$ 成立,求实数 m 的取值范围.

华大新高考联盟2018届高三1月教学质量测评

文科数学参考答案和评分标准

一、选择题

1. B　考查函数定义域和集合运算.

【解析】∵$A=\{x|x\geqslant-1\}$，$B=\{x|x>0\}$，∴$A\cup B=A$.　∴选B.

2. D　考查复数的基本概念、几何意义以及复数的代数运算.

【解析】计算得 $z=1-3i$，　∴选D.

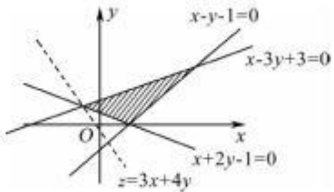
3. A　考查抛物线方程以及双曲线相关概念.

【解析】双曲线下顶点为$(0,-2)$，∴$-\frac{p}{2}=-2$，∴$p=4$，∴$x^2=8y$.　∴选A.

4. D　考查简易逻辑相关知识.

【解析】∵命题 p 为真命题，命题 q 为假命题，∴$p\wedge(\quad q)$是真命题.　∴选D.

5. C　考查线性规划有关知识.



【解析】令 $z=3x+4y$，由图知最优解对应点为$\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$，

∴$z_{\min}=3\times\left(-\frac{3}{5}\right)+4\times\frac{4}{5}=\frac{7}{5}$.　∴选C.

6. C　考查几何概型、指数函数、对数函数以及分段函数有关知识.

【解析】$f(m)>f(1)=1$，当 $m\in[0,7]$时，$f(m)=\log_2(m+1)>1$，∴$1<m\leqslant7$.

当 $m\in[-3,0)$时，$f(m)=2^{-m}-3>1$，∴$-3\leqslant m<-2$，∴所求概率 $P=\frac{6+1}{10}=\frac{7}{10}$.　∴选C.

7. B　考查三角函数和差公式、三角的恒等变形以及三角函数图象，考查学生计算化简求解能力.

【解析】
$$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\cos2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x-\frac{1}{2}\cos2x-\cos2x$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x-\frac{3}{2}\cos2x=\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right),$$

令 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，∴ $x=\frac{5}{12}\pi+\frac{k}{2}\pi(k\in\mathbf{Z})$.　∴选B.

8. C　考查函数图象、函数奇偶性、单调性等性质.

【解析】用 $f(x)$为奇函数来否定选项B，D，又 $f(2)=-8$，$f(3)=-\frac{27}{2}$，而 $f(2)>f(3)$，否定选项A（或当 $x>1$ 时，求导 $f'(x)=-\frac{x^2(2x-3)}{(1-x)^2}$来分析单调性，而否定选项A），　∴选C.

9. B　考查向量平行、垂直的坐标运算，考查学生在三角形中应用正、余弦定理进行运算求解的能力.

【解析】∵$\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，∴$(c-3b)\cos A+a\cos C=0$，

∴$(\sin C-3\sin B)\cos A+\sin A\cos C=0$，

∴$\sin(A+C)=3\sin B\cos A$，∴$\sin B=3\sin B\cos A$，又 $\sin B\neq0$，∴$\cos A=\frac{1}{3}$.

∵$\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{p}$，∴$c-3b=0$，∴$c=3b$，由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=8b^2$ 得 $a=2\sqrt{2}b$，

∴ $\frac{a}{b}=2\sqrt{2}$. ∴选B.

10. C　考查对程序框图基本逻辑结构的理解和掌握情况，考查学生运用所学知识解决实际生活中的

问题的能力.

【解析】$S=7+7+4+1+9+1=29$，$T=9+a_3+0+0+1+9=19+a_3$，

$M=3\times29+19+a_3=106+a_3$，

方法1 由题意知 $a_{13}=6$，∴ $N=4$.

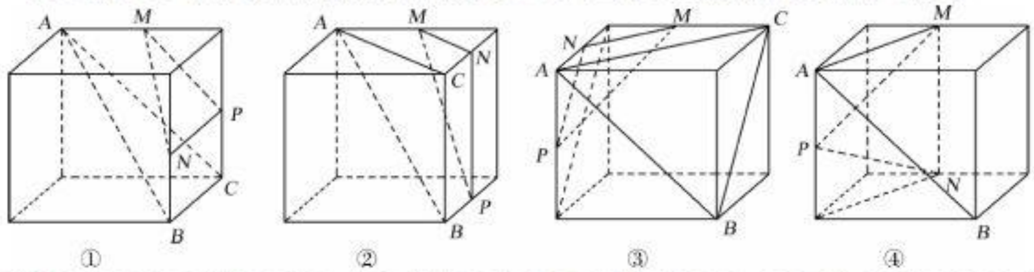
∴ $106+a_3-\left[\dfrac{106+a_3}{10}\right]\times10=4$，再根据选择支 $a_3=4,5,8$ 检验得 $a_3=8$. ∴选 C.

方法2 当 $0\leqslant a_3<4$ 时，$N=6+a_3$，∴$a_3=-2$(舍去)，

当 $4\leqslant a_3\leqslant9$ 时，$N=6+a_3-10=a_3-4$，

∴$6=10-(a_3-4)$，∴$a_3=8$， ∴选 C.

11. D 考查立体几何中的线面平行、面面平行相关知识，考查学生空间想象和逻辑推理能力.



【解析】∵平面 ABC//平面 MNP，∴①正确. ∵平面 ABC//平面 MNP，∴②正确. ∵平面 MNP//平面 ABC，∴③正确. ∵$AB\cap$平面 $PMN=A$，∴④错误. ∴选 D.

12. A 考查三角函数的周期性及图象、椭圆、不等式相关知识，考查学生数形结合能力以及化归思想.

【解析】集合 A 表示 $f(x)$ 的最大值和最小值对应的点，且两个相邻的最大值(或最小值)点之间长度为一个周期 T，$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0)$ 的最大值或最小值一定在直线 $y=\pm1$ 上，又在集合 B 中，当 $y=\pm1$ 时，$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{1}{2}\leqslant1$ $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$. 若存在实数 φ，即可将函数 $f(x)$ 适当平移，依题意得 $\begin{cases}2T\leqslant2\sqrt{3},\\2T+\dfrac{T}{2}>2\sqrt{3},\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}2\cdot\dfrac{2\pi}{\omega}\leqslant2\sqrt{3},\\\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{2\pi}{\omega}>2\sqrt{3},\end{cases}$ ∴$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi\leqslant\omega<\dfrac{5\sqrt{3}}{6}\pi$， ∴选 A.

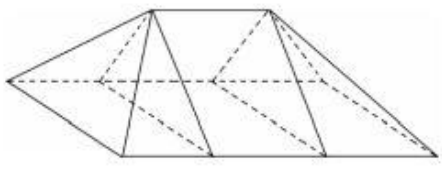
二、填空题

13. $\dfrac{4}{3}$ 考查诱导公式、倍角公式以及同角三角函数关系的应用.

【解析】∵$2\cos\alpha=-\sin\alpha$，∴$\tan\alpha=-2$，

∴$\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{4}{3}$.

14. $\dfrac{14}{3}$ 考查几何体的三视图、学生空间想象能力、根据公式合理分割转化几何体能力.



【解析】转化为一个直三棱柱和两个四棱锥计算，

$V=\dfrac{1}{2}\times2\times2\times1+2\times\dfrac{1}{3}\times2\times1\times2=\dfrac{14}{3}$.

15. $\dfrac{5\sqrt{5}}{11}$或$\sqrt{5}$ 考查直线与圆的位置关系、双曲线渐近线和离心率的有关知识，考查学生运算求解能力.

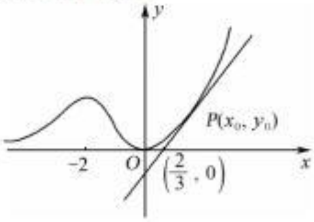
【解析】设与圆相切的双曲线的渐近线为 $y=\frac{b}{a}x$，即 $bx-ay=0$．

$\therefore d=\frac{|4b-3a|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{5}$，$\therefore 11b^2-24ab+4a^2=0$．$\therefore(11b-2a)(b-2a)=0$．

$\therefore\frac{b}{a}=\frac{2}{11}$或$\frac{b}{a}=2$．$\therefore e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$，$\therefore e=\frac{5\sqrt{5}}{11}$或 $e=\sqrt{5}$．

16．$[0,6e]$　考查导数、曲线的切线以及学生灵活运用化归思想和数形结合方法的能力．

【解析】$\because f(x)\geqslant 0$，$\therefore 2x^2e^x\geqslant m\left(x-\frac{2}{3}\right)$．



令 $y_1=2x^2e^x$，$y_2=m\left(x-\frac{2}{3}\right)$，则 $y_1'=(2x^2+4x)e^x$，

由$(2x^2+4x)e^x=0$ 得 $x=0$ 或 $x=-2$，

分别作 $y_1=2x^2e^x$，$y_2=m\left(x-\frac{2}{3}\right)$的图象，

要求 $y_1=2x^2e^x$ 的图象不在 $y_2=m\left(x-\frac{2}{3}\right)$图象的下方．

设切点 $P(x_0,y_0)$，切线为 $y-y_0=k(x-x_0)$，即 $y-2x_0^2e^{x_0}=(2x_0^2+4x_0)(x-x_0)e^{x_0}$．

由切线过点$\left(\frac{2}{3},0\right)$得 $0-2x_0^2e^{x_0}=(2x_0^2+4x_0)e^{x_0}\left(\frac{2}{3}-x_0\right)$，

$\therefore x_0=0$ 或 $-x_0=(x_0+2)\left(\frac{2}{3}-x_0\right)$　$x_0=0$ 或 $x_0=-\frac{4}{3}$或 $x_0=1$．

由图象知 $0\leqslant m\leqslant(2+4)e$，$\therefore 0\leqslant m\leqslant 6e$．

三、解答题

17．考查等差中项、等比数列定义、前 n 项和与通项的关系以及前 n 项和公式的应用．

(1) $\because 1,a_n,S_n$ 成等差数列，$\therefore 1+S_n=2a_n$．　①　…………（1分）

当 $n=1$ 时，$1+S_1=2a_1$　$a_1=1$．…………（2分）

当 $n\geqslant 2$ 时，$1+S_{n-1}=2a_{n-1}$，　②

①－②得 $S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$　$a_n=2a_n-2a_{n-1}$　$a_n=2a_{n-1}$．…………（4分）

又 $a_1\neq 0$，$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2$，$\therefore\{a_n\}$成等比数列，…………（5分）

$\therefore a_n=a_1\times 2^{n-1}=2^{n-1}$．…………（6分）

(2) $\because\frac{1}{a_n+a_{n+1}}=\frac{1}{2^{n-1}+2^n}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，…………（7分）

又$\frac{1}{a_1+a_2}+\frac{1}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n+a_{n+1}}=\frac{f(n)}{a_{n+1}^2}$，$\therefore\frac{\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{f(n)}{2^{2n}}$．

$\therefore f(n)=\frac{2}{3}(2^{2n}-2^n)$，…………（10分）

又 $f(n)=\frac{2}{3}(2^{2n}-2^n)=8$，$\therefore(2^n-4)(2^n+3)=0$，…………（11分）

$\therefore 2^n=4$，$\therefore n=2$．…………（12分）

18．考查直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系，考查学生的空间想象能力、逻辑推理能力．

(1) $\because\angle APD=90^\circ$，　$\therefore AP\perp PD$．…………（1分）

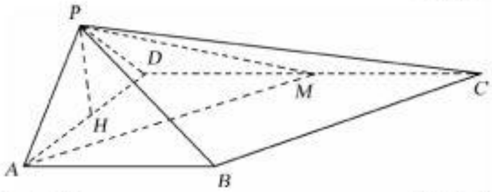
$\because AB\perp$平面 PAD，$PA\subset$平面 PAD，$\therefore AB\perp PA$．…………（3分）

$\because AB/\!/CD$，　$\therefore PA\perp CD$．…………（4分）

$\because CD\cap PD=D$，$\therefore AP\perp$平面PCD. ………………………………（5分）

又$AP\subset$平面PAB，

$\therefore$平面$PAB\perp$平面PCD. …………………（6分）



(2)如图，取CD的中点M，连接PM，AM，

$\because CD=2AB$，$AB/\!/CD$，

$\therefore$四边形$ABCM$为平行四边形，$AM/\!/BC$.

则$\angle PAM$为异面直线PA与BC所成的角，即$\angle PAM=60°$. ………………………………（7分）

由(1)知，$PA\perp$平面PCD，$\therefore PA\perp PM$. 又$PA=2$，$\therefore AM=4$. ……………………………（8分）

而$AD=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，$\therefore DM=\sqrt{4^2-(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$，

$\therefore CD=4\sqrt{2}$，$AB=2\sqrt{2}$. ………………………………………………（9分）

如图，取AD的中点H，连接PH，$\triangle PAD$为等腰直角三角形，则$PH\perp AD$，$PH=\sqrt{2}$.

$\because AB\perp$平面PAD，$\therefore AB\perp PH$. 又$AB\cap AD=A$，$\therefore PH\perp$平面$ABCD$，……………（11分）

$\therefore V_{P\text{-}ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(2\sqrt{2}+4\sqrt{2})\times2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=4\sqrt{2}$. ……………………………（12分）

19. 考查统计与概率的基础知识和基本思想方法以及频率分布直方图的知识与应用，考查学生应用所学的统计和概率知识分析解决实际生活中的问题的能力.

(1) $f(40)=2.5\times40-22.5=77.5$(万元)，……………………………………（2分）

$f(50)=45\times2.5-22.5=90$(万元)，…………………………………………（4分）

$f(x)=\begin{cases}2.5x-22.5,x\in[10,45],\\90,x\in(45,70].\end{cases}$ ………………………………………（6分）

(2) 依题意：当$10\leqslant x\leqslant45$时，利润$f(x)=2.5x-22.5$，

$2.5x-22.5\geqslant55$，解得$x\geqslant31$，即$31\leqslant x\leqslant45$. ………………………………（8分）

当$45<x\leqslant70$时，利润为90万元，显然满足条件，……………………………（9分）

而$P(31\leqslant x\leqslant70)=1-\left(0.004+0.012+0.04\times\frac{1}{10}\right)\times10=0.8$，……………………（11分）

所以甲水厂每天的利润不少于55万元的概率为0.8. ……………………………（12分）

20. 考查椭圆的标准方程和几何性质以及直线与椭圆的位置关系，考查学生转化能力、逻辑思维能力和运算求解能力.

(1) $\because\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore a=\sqrt{2}c$，…………………………………………（1分）

$\because\frac{1}{2}bc=2$，$\therefore b=\frac{4}{c}$，…………………………………………………（2分）

$\because a^2=b^2+c^2$，$\therefore 2c^2=\frac{16}{c^2}+c^2$，$\therefore c=2$，$\therefore a=2\sqrt{2}$，$b=2$，……………………………（3分）

$\therefore$椭圆方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. ……………………………………………（4分）

(2) PO的中点为$M(0,1)$，当AB垂直于x轴时，根据椭圆的对称性，显然满足，

即直线l的方程为$x=0$. …………………………………………………………（5分）

当AB不垂直于x轴时，设AB：$y=kx+1$交椭圆于$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

$\begin{cases}y=kx+1,\\\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$ $(1+2k^2)x^2+4kx-6=0$. ……………………………（6分）

$\therefore x_1+x_2=-\frac{4k}{1+2k^2}$，$x_1x_2=-\frac{6}{1+2k^2}$. ……………………………（7分）

$\because A$ 点关于 x 轴的对称点在直线 BC 上，$\therefore k_{AC}=-k_{BC}$，

$\frac{y_1}{x_1+3}+\frac{y_2}{x_2+3}=0$ $\frac{kx_1+1}{x_1+3}+\frac{kx_2+1}{x_2+3}=0$ $2kx_1x_2+(3k+1)(x_1+x_2)+6=0$. ………… (9 分)

故 $2k\left(-\frac{6}{1+2k^2}\right)+(3k+1)\left(-\frac{4k}{1+2k^2}\right)+6=0$ $k=\frac{3}{8}$， $\therefore y=\frac{3}{8}x+1$. …………… (11 分)

综上可知，AB 所在的直线方程 l 为 $x=0$ 或 $3x-8y+8=0$. …………………………… (12 分)

21. 考查导数公式和导数的运算法则，考查学生灵活运用导数这一工具去分析问题和解决问题的能力.

(1) 当 $a=3$ 时，令 $F(x)=f(x)-g\left(x-\frac{1}{4}\right)=3x^2-x-\ln x-\frac{3}{4}$ $(x>0)$， ……………… (1 分)

$F'(x)=6x-1-\frac{1}{x}=\frac{6x^2-x-1}{x}=\frac{(2x-1)(3x+1)}{x}=0$ $x=\frac{1}{2}$. …………………………… (2 分)

故当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$时，$F'(x)<0$，$\therefore F(x)$单调递减，

当 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$时，$F'(x)>0$，$\therefore F(x)$单调递增，…………………………………………… (3 分)

故 $F(x)\geqslant F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=\frac{2\ln 2-1}{2}=\frac{\ln\frac{4}{e}}{2}>0$，

$\therefore F(x)>0$. $\therefore f(x)>g\left(x-\frac{1}{4}\right)$. ………………………………………………………………… (5 分)

(2) 令 $h(x)=f(x)-g(x)=ax^2-\ln x-(a-2)x-1$，

$h'(x)=2ax-\frac{1}{x}-(a-2)=\frac{2ax^2-(a-2)x-1}{x}=\frac{(2x-1)(ax+1)}{x}$ $(x>0)$， …………… (7 分)

①当 $a\geqslant 0$ 时，$h'(x)=0$ $x=\frac{1}{2}$.

$h(x)$与 $h'(x)$在区间$(0,+\infty)$上的情况如下：

x	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	最小值	↗

$h_{\min}=h\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}a+\ln 2=0$ $a=4\ln 2$，此时 $h(x)$有一个零点. ………………………… (8 分)

② 当 $a<0$ 时，$h'(x)=0$ $x=\frac{1}{2}$或 $x=-\frac{1}{a}$.

当$-\frac{1}{a}<\frac{1}{2}$时，即 $a<-2$ 时，

$h(x)$与 $h'(x)$在区间$(0,+\infty)$上的情况如下：

x	$\left(0,-\frac{1}{a}\right)$	$-\frac{1}{a}$	$\left(-\frac{1}{a},\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

$h_{极小值}=h\left(-\frac{1}{a}\right)=-\frac{1}{a}+\ln(-a)>0$，$h_{极大值}=h\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}a+\ln 2>0$.

由 $h(x)$的图象知 $h(x)$有一个零点. ………………………………………………………… (9 分)

当 $-\frac{1}{a}>\frac{1}{2}$ 时，即 $-2<a<0$ 时，

$h(x)$ 与 $h'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的情况如下：

x	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{a}\right)$	$-\frac{1}{a}$	$\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

$h_{极小值}=h\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}a+\ln 2$，$h_{极大值}=h\left(-\frac{1}{a}\right)=-\frac{1}{a}+\ln(-a)$，

$h_{极大值}>h_{极小值}=-\frac{1}{4}a+\ln 2>0$. 由 $h(x)$ 的图象知 $h(x)$ 有一个零点. …………………… (10 分)

当 $-\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$，即 $a=-2$ 时，

$h'(x)=-\frac{(2x-1)^2}{x}\leqslant 0$，$h(x)$ 为单调递减函数，由 $h(x)$ 的图象知 $h(x)$ 有一个零点. …… (11 分)

综上可知，当方程 $f(x)=g(x)$ 有且只有一个实根时，a 的取值范围为 $a<0$ 或 $a=4\ln 2$. …………
……………………………………………………………………………………………… (12 分)

22. 考查极坐标与直角坐标的互化、直线参数方程的应用.

(1) 由 $C:\rho(1-\cos 2\theta)=2m\cos\theta$ 得 $\rho(1-1+2\sin^2\theta)=2m\cos\theta$.

∴$\rho^2\sin^2\theta=m\rho\cos\theta$. ∴曲线 C 的直角坐标方程为 $y^2=mx$. ………………………… (5 分)

(2) 将直线 l 的参数方程代入抛物线方程得 $\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2=m\left(-2+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$，

∴$\frac{t^2}{2}-\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}m}{2}\right)t+2m+1=0$，……………………………………………… (7 分)

由 $\Delta=\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}m}{2}\right)^2-2(2m+1)>0$，得 $m<0$ 或 $m>4$，( )

∴$t_1t_2=4m+2$. ……………………………………………………………………………… (8 分)

又 $|PA|\cdot|PB|=22$，依题意有 $|PA|\cdot|PB|=|t_1t_2|=|4m+2|=22$，

∴$m=5$ 或 $m=-6$，代入( )检验满足，∴$m=5$ 或 $m=-6$. ……………………… (10 分)

23. 考查含绝对值不等式的解法以及含绝对值函数的图象和最值.

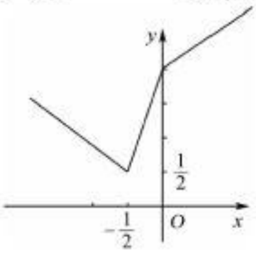
(1) 原不等式可化为 $|2x+1|\geqslant|x|$，

即 $(2x+1)^2\geqslant x^2$　$(3x+1)(x+1)\geqslant 0$　$x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant -\frac{1}{3}$，

∴$x\in(-\infty,-1]\cup\left[-\frac{1}{3},+\infty\right)$. ……………………………………………………… (5 分)

(2) ∵$m^2\geqslant 0$，∴原不等式可化为 $2x_0+1$ − x_0 $+1\leqslant 2m^2+1-m^2+1-2=m^2$，……… (6 分)

令 $y=$ $2x_0+1$ − x_0 $+1$　$y=\begin{cases}x_0+2, & x_0\geqslant 0,\\ 3x_0+2, & -\frac{1}{2}\leqslant x_0<0,\\ -x_0, & x_0<-\frac{1}{2}.\end{cases}$ ……… (8 分)



由函数图象可知 $y_{\min}=\frac{1}{2}$. …………………………………………… (9 分)

∵ $x_0\in\mathbf{R}$，使不等式 $m^2\geqslant$ $2x_0+1$ − x_0 $+1$ 成立，∴ $m^2\geqslant\frac{1}{2}$，

即 $m\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $m\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$. ………………………………………………………………… (10 分)