天津市耀华中学2023届高三年级第三次月考

数学试卷

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共150分．考试用时120分钟．

第Ⅰ卷（选择题　共45分）

一、选择题（本大题共9小题，每小题5分，共45分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．将答案填在规定位置）

1．设集$A=\{-2,-1,0,1,2\}$.集合$B=\{x\mid x^2-x-2<0\}$.则$A\cap B=$（　　）

A. $\{-1,0,1\}$　　B. $\{0,1\}$

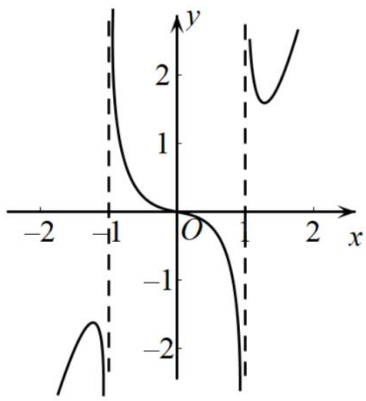
C. $\{1,2\}$　　D. $\{-1,0,1,2\}$

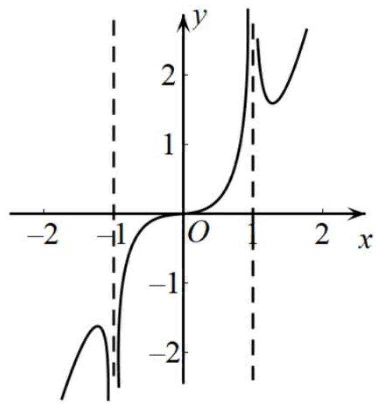
2. 在△ABC中，“$\sin A<\sin B$”是“A＜B”的(　　)

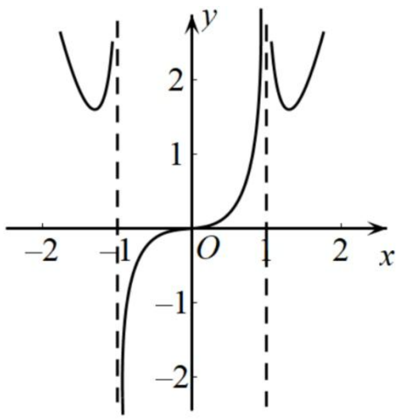
A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

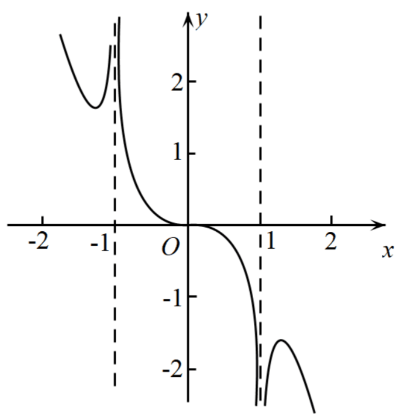
C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 函数$y=\dfrac{x^3}{\sqrt[3]{x^4-1}}$的图像大致是（　　）

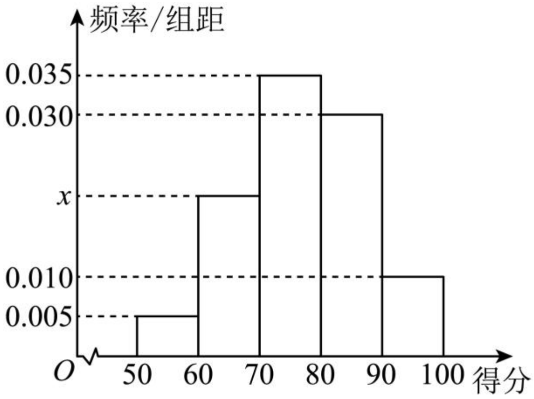
A. 

B. 

C. 

D. 

4. 2022 年 12 月 4 日是第九个国家宪法日，主题为"学习宣传贯彻党的二十大精神，推动全面贯彻实施宪法"，耀华园结合线上教育教学模式，开展了云升旗，云班会等活动．其中由学生会同学制作了宪法学习问卷，收获了有效答卷 2000 份，先对其得分情况进行了统计，按照$[50,60)$、$[60,70)$、…、$[90,100]$分成 5 组，并绘制了如图所示的频率分布直方图，下列说法不正确的是（　　）



A. 图中x的值为 0.02

B. 由直方图中的数据，可估计 75%分位数是 85

C. 由直方图中的数据，可估计这组数据的平均数为 77

D. 90 分以上将获得优秀，则全校有 20 人获得优秀

5. 已知$\odot M$：$x^2+y^2-2x-2y-2=0$，直线l：$2x+y+2=0$，P为l上的动点，过点P作$\odot M$的切线PA,PB，切点为A,B，当$|PM|\cdot|AB|$最小时，直线AB的方程为（　　）

A. $2x-y-1=0$　　B. $2x+y-1=0$　　C. $2x-y+1=0$　　D. $2x+y+1=0$

6. 设函数$f\left(x\right)=\left(\sin x+\cos x\right)^2-\cos 2x$，则下列结论错误的是（　　）

A. $f\left(x\right)$的最大值为$\sqrt{2}+1$

B. $f\left(x\right)$的一个零点为$x=\dfrac{\pi}{8}$

C. $f\left(x\right)$的最小正周期为π

D. $y=f\left(x\right)$的图象关于直线$x=\dfrac{3\pi}{8}$对称

7. 双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左右焦点分别是$F_1$，$F_2$，离心率为$e$，过$F_1$的直线交双曲线的左支于$M$，$N$两点，若$\triangle MF_2N$是以$M$为直角顶点的等腰直角三角形，则$e^2$等于（　　）

A. $5-2\sqrt{2}$　　B. $5+2\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}-2$

8. 已知$0.5^x=x$，$\log_{0.5}y=x^y$，$\log_x z=0.5^z$，则（　　）

A. $y<x<z$　　B. $z<x<y$　　C. $x<z<y$　　D. $z<y<x$

9. 已知定义在R上的偶函数$f(x)$，满足$[f(x)]^3-[f(x)]^2-x^2f(x)+x^2=0$对任意的实数$x$都成立，且值域为$[0,1]$.设函数$g(x)=|x-m|-|x-1|$，（$m<1$），若对任意的$x_1\in(-2,\frac{1}{2})$，存在$x_2>x_1$，使得$g(x_2)=f(x_1)$成立，则实数$m$的取值范围为（　　）

A. $[-6,1)$　　B. $[-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}]$　　C. $[0,1)$　　D. $[-\frac{1}{2},0]$

第II卷（非选择题　共105分）

二、填空题（本大题共6小题，每小题5分，共30分．将答案填在答题纸相应位置上）

10. 若$z=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，则$\dfrac{z}{z\bar{z}-1}=$__________.

11. $\left(x^3-\dfrac{3}{x^2}\right)^5$展开式中的常数项为__________.

12. “二十四节气”已经被列入联合国教科文组织人类非物质文化遗产代表作名录．我国古代天文学和数学著作《周髀算经》中记载：冬至、小寒、大寒、立春、雨水、惊蛰、春分、清明、谷雨、立夏、小满、芒种．这十二个节气的日影长依次成等差数列．若冬至的日影子长为15.5尺，芒种的日影子长为4.5尺，则雨水、惊蛰、春分、清明的日影长的和是__________尺．

13. 在三棱锥$P-ABC$中，$PA=PB=PC=2\sqrt{5}$，$AB=BC=AC=2\sqrt{3}$，则三棱锥$P-ABC$外接球的体积是______.

14. 已知正数x,y满足$\dfrac{8}{3x^2+2xy}+\dfrac{3}{xy+2y^2}=1$，则$xy$的最小值是________.

15. 已知O为矩形$ABCD$内一点，满足$|\overrightarrow{OA}|=5$，$|\overrightarrow{OC}|=4$，$|\overrightarrow{AC}|=7$，则$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=$__________.

三、解答题（本大题共5小题，共75分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．将答案填在答题纸上）

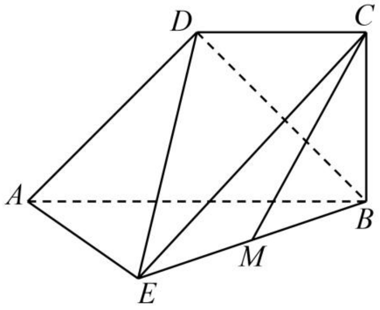
16. 已知在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对边分别为a，b，c，$(\sin A-\sin B)^2=\sin^2C-\sin A\sin B$.

（Ⅰ）求角C的大小；

（Ⅱ）若$a=3b$，求$\cos(2B+C)$的值.

17. 如图，在四棱锥$E-ABCD$中，平面$ABCD\perp$平面ABE，$AB//DC$，$AB\perp BC$，

$AB=2BC=2CD=2$，$AE=BE=\sqrt{3}$，点 M 为 BE 的中点.



（1）求证：CM // 平面 ADE；

（2）求平面 EBD 与平面 BDC 夹角的正弦值；

（3）在线段 AD 上是否存在一点 N，使直线 MD 与平面 BEN 所成的角正弦值为 $\dfrac{4\sqrt{6}}{21}$，若存在求出 AN 的长，若不存在说明理由.

18. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F，上顶点为 B，离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，且过点 F 且与 x 轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为 $\dfrac{8}{3}$.

（1）求椭圆的标准方程；

（2）直线 $l:y=kx+m$ 与椭圆有唯一的公共点 M，与 y 轴的正半轴交于点 N，过 N 与 BF 垂直的直线交 x 轴于点 P.若 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{BF}=\dfrac{45}{8m}$，求直线 l 的方程.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列，其前 8 项的和为 64．数列 $\{b_n\}$ 是公比大于 0 的等比数列，$b_1=3$，$b_3-b_2=18$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）记 $c_n=(-1)^n a_n^2$，$n\in\mathrm{N}^*$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n}；

（3）设 $d_n=\dfrac{2}{3}b_n-n^2$，记 $T_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{d_i}$，证明：当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$2T_n+\dfrac{3}{2b_n-\left(\dfrac{a_n+3}{2}\right)^2}\le\dfrac{7}{2}$.

20. 已知函数 $f(x)=\ln(ax)-\mathrm{e}^{x-1}(a>0)$ 有最大值 -2，

（1）求实数 a 的值；

（2）若 $y=\ln x$ 与 $y=\mathrm{e}^{x-m}$ 有公切线 $y=k(x+1)+\ln a$，求 $k(m-k)$ 的值.

（3）若有 $\ln x \le k\left(x+1\right)+\ln a \le \mathrm{e}^{x-m}$，求 $k\left(m-k\right)$ 的最大值.