

江西师大附中 2023 届高三三模考试数学（文）试卷

命题、审题人： 欧阳晔 吴小平 2023. 5

一、选择题：本大题共 12 小题。每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{x | (x+1)(x-2) \leq 0\}$, $N = \{y \in Z | y = 2 - 2^x\}$, 则 $M \cap N = (\quad)$

- A. \emptyset B. $[-1, 2)$ C. $\{-1, 0, 1, 2\}$ D. $\{-1, 0, 1\}$

2. 已知复数 z 满足 $2z - i \cdot \bar{z} = 1 + 4i$ (i 为虚数单位), 则复数 z 的虚部为()

- A. 3 B. $3i$ C. $\frac{9}{5}$ D. $\frac{9}{5}i$

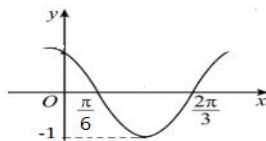
3. 已知 $a \in R$, 则“ $a = 1$ ”是“直线 $l_1: ax + y + 2 = 0$ 与 $l_2: x + ay - 3 - a = 0$ 平行”的() 条件

- A. 充分不必要 B. 必要不充分 C. 充要 D. 既不充分也不必要

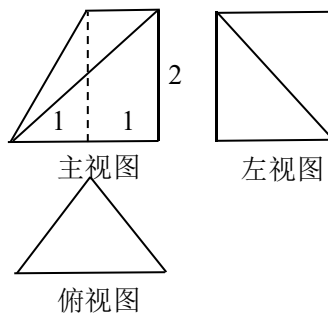
4. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 4, AC = 6, \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NB}, \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BM} = -4$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\quad)$

- A. 2 B. 3 C. 6 D. 12

5. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 部分图像如下, 将 $f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到 $g(x)$ 的图像, 则下列关于 $g(x)$ 的成立的是



- A. 图像关于 y 轴对称 B. 图像关于 $(\frac{2}{3}\pi, 0)$ 中心对称
 C. 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增 D. 在 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 最小值为 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$



6. 已知某几何体的三视图如图, 其俯视图是边长为 2 的正三角形, 则该几何体的体积为()

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ D. $2\sqrt{3}$

7. 已知 F 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点, $P(0, \sqrt{6}a)$, 直线 PF 与双曲线 C 有且只有一个公共点, 则双曲线 C 的离心率为()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{6}$

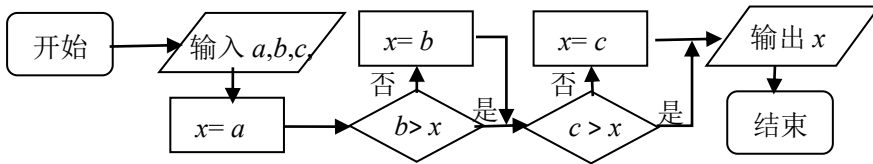
8. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = 2n - 1 (n \in N^*)$, 如果把数列 $\{a_n\}$ 的奇数项都去掉, 余下的项依次排列构成新数列为 $\{b_n\}$, 再把数列 $\{b_n\}$ 的奇数项又去掉, 余下的项依次排列构成新数列为 $\{c_n\}$, 如此继续下去, …… 那么得到的数列 (含原已知数列) 的第一项按先后顺序排列, 构成的数列记为 $\{P_n\}$, 则数列 $\{P_n\}$ 前 10 项的和为()

- A. 1013 B. 1023 C. 2036 D. 2050

9. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, E 为棱 CC_1 上的一点, 且满足平面 $BDE \perp$ 平面 A_1BD , 则四面体 $ABCE$ 的外接球的表面积为()

- A. 9π B. 18π C. 36π D. 81π

10. 已知 $a = 0.4^{0.5}$, $b = 0.5^{0.4}$, $c = \log_{32} 8$, 执行下列框图程序, 则输出的是()



- A. a B. b C. c D. 不能确定

11. 已知 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $c = 4$, $\sin \angle ABC = 2 \sin \angle BAC$, M 为 AB 的中点, 则 $\sin \angle BMC$ 的最大值为()

- A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{1}{5}$

12. 若不等式 $e^x + x(a \ln x - ax + e^2) \geq 0$ 在 $x > 0$ 上恒成立, 则实数 a 的取值范围是()

- A. $(-\infty, e]$ B. $(-\infty, e^2]$ C. $(-\infty, \frac{e}{2}]$ D. $(-\infty, \frac{e^2}{2}]$

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分.

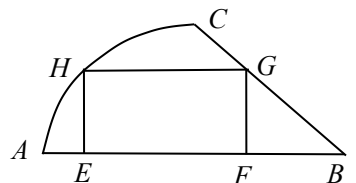
13. 已知函数 $f(x) = \ln(e^x + 1) - kx$ 是偶函数, $g(x) = \begin{cases} \log_2(x+7) & (x \geq 0) \\ 2+kx & (x < 0) \end{cases}$, 则 $g(g(-2)) =$ _____.

14. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ 3x - y - 5 \leq 0 \\ x + 3y + 5 \leq 0 \end{cases}$, 则目标函数 $z = 2x + y$ 的最大值为 _____.

15. 城市地铁极大的方便了城市居民的出行, 南昌地铁 1 号线是南昌市最早建成并成功运营的一条地铁线。已知 1 号地铁线的每辆列车有 6 节车厢, 从 5 月 1 日起实行“夏季运行模式”, 其中 2 节车厢开启强冷模式, 2 节车厢开启中冷模式, 2 节车厢开启弱冷模式。现在有甲、乙 2 人同一时间同一地点乘坐同一趟地铁列车, 由于个人原因, 甲不选择强冷车厢, 乙不选择弱冷车厢, 但他们都是独立而随机的选择一节车厢乘坐, 则甲、乙 2 人不在同一节车厢的概率为 _____.



16. 某城市有一块不规则的空地 (如图), 两条直边 $AB = 200\text{m}$, $BC = 100\sqrt{2}\text{m}$, $\angle ABC = 45^\circ$, 曲边 AC 近似为抛物线的一部分, 该抛物线的对称轴正好是直线 AB . 该城市规划部门计划利用该空地建一座市民活动中心, 该中心的基础建面是一个矩形 $EFGH$, EF 在边 AB 上, G 在边 BC 上, H 在曲边 AC 上, 为使建面 $EFGH$ 最大, 则 $\frac{BG}{BC} =$ _____.



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分) 已知各项为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，满足 $S_{n+1} + S_n = \frac{1}{2} a_{n+1}^2$ ， $a_1 = 2$ 。

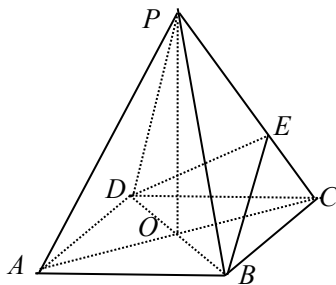
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n = \frac{a_n}{3^n}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项的和 T_n 。

18. (12) 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是正方形，
 $AC \cap BD = O$ ， $PA = PD = \sqrt{5}$ ， $PO = \sqrt{3}$ ，
 $AD = 2$ ， E 是棱 PC 上任一点。

(1) 求证：平面 $BDE \perp$ 平面 PAC ；

(2) 若 $PE=2EC$ ，求点 A 到平面 BDE 的距离。



19. (12 分) 2015 年 7 月 31 日,国际奥委会宣布北京获得 2022 年冬奥会举办权,消息传来,举国一片欢腾。某投资公司闻到了商机,决定开发冰雪运动项目,经过一年多的筹备,2017 年该公司冰雪运动项目正式运营。下表是 2017—2021 年该公司第一季度冰雪运动项目消费人数的统计表：

年份	2017	2018	2019	2020	2021
年份代号 x	1	2	3	4	5
消费人数 y (单位:百人)	62	82	106	128	152

(1) 若年份 x 与第一季度冰雪运动项目消费人数 y (百人) 具有线性相关关系, 求出它们间的回归方程, 并预估 2022 年第一季度冰雪运动项目消费的人数是多少?

(2) 某记者为调查北京冬奥会对冰雪运动项目运动的影响, 随机调查了 200 人, 其中 80 人是在冬奥会开幕前调查的, 约有 $\frac{1}{4}$ 的人已参加过冰雪运动项目, 冬奥会开幕后调查的人数中已参加过冰雪运动项目与未参加的人数比为 $\frac{5}{7}$, 问有多大的把握认为参加冰雪运动项目与北京冬奥会的开幕有关?

参考公式: $b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$, $a = \bar{y} - b \bar{x}$, $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

参考数据: $\sum_{i=1}^5 y_i = 530$,
 $\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 1816$,

$P(K^2 \geq k)$	0. 10	0. 05	0. 025	0. 01
k	2. 706	3. 841	5. 024	6. 635

20. (12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点为 $A(0,1)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过点 $P(-2,1)$ 的直线与椭圆 C 交于不同的两点 D, E , 点 D 在第二象限, 直线 AD, AE 分别与 x 轴交于 M, N , 求四边形 $DMEN$ 面积的最大值.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = \frac{a}{x^2}, g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

(1) 若 $f(x)$ 在点 $M(1, f(1))$ 处的切线与直线 $x - 2y + 2 = 0$ 垂直, 求该切线方程;

(2) 若 $g(x)$ 的极值点为 x_0 , 设 $\varphi(x) = x[f(x) + g(x)]$, 且 $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 3, (x_1 \neq x_2)$

证明: $x_0 x_1 x_2 > ea^2$.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分

22. (10分) 【选修 4-4: 坐标系与参数方程】

在直角坐标系 xOy 中, l 是过 $P(0,2)$ 且倾斜角为 α 的一条直线, 又以坐标原点 O 为极点, x 的非负半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 = \frac{4}{\cos 2\theta}$.

(1) 写出直线 l 的参数方程, 并将曲线 C 的极坐标方程化为直角坐标方程;

(2) 若直线 l 与曲线 C 在 y 轴的右侧有两个交点 D, E , 过点 $F(2\sqrt{2}, 0)$ 作 l 的平行线, 交 C 于 G, H 两点, 求证: $\frac{|PD||PE|}{|FG||FH|} = 2$.

23. (10分) 【选修 4-5: 不等式选讲】

已知函数 $f(x) = |2x+2| + |x-a|$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) \leq 5$ 的解集;

(2) 是否存在正数 a , 使得 $f(x)$ 的图像与直线 $y=6$ 所围成的四边形的面积等于 9, 若存在, 求出 a 的值, 若不存在, 请说明理由.