数 学 Ⅰ 试 题

参考公式：

样本数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的方差 $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$，其中 $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$.

柱体的体积 $V = Sh$，其中 S 是柱体的底面积，h 是柱体的高.

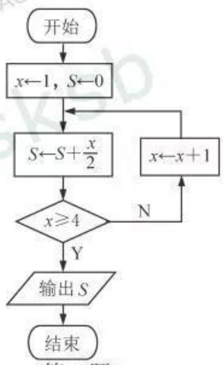
锥体的体积 $V = \frac{1}{3}Sh$，其中 S 是锥体的底面积，h 是锥体的高.

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共计 70 分. 请把答案填写在答题卡相应位置上.

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 6\}$，$B = \{x \mid x > 0, x \in \mathbf{R}\}$，则 $A \cap B =$ ___▲___.

2. 已知复数 $(a + 2\mathrm{i})(1 + \mathrm{i})$ 的实部为 0，其中 i 为虚数单位，则实数 a 的值是 ___▲___.

3. 右图是一个算法流程图，则输出的 S 的值是 ___▲___.



（第 3 题）

4. 函数 $y = \sqrt{7 + 6x - x^2}$ 的定义域是 ___▲___.

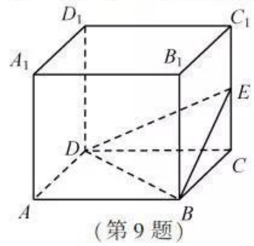
5. 已知一组数据 6，7，8，8，9，10，则该组数据的方差是 ___▲___.

6. 从 3 名男同学和 2 名女同学中任选 2 名同学参加志愿者服务，则选出的 2 名同学中至少有 1 名女同学的概率是 ___▲___.

7. 在平面直角坐标系 xOy 中，若双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1(b > 0)$ 经过点 $(3, 4)$，则该双曲线的渐近线方程是 ___▲___.

8. 已知数列 $\{a_n\}(n \in \mathbf{N}^*)$ 是等差数列，S_n 是其前 n 项和. 若 $a_2a_5 + a_8 = 0$，$S_9 = 27$，则 S_8 的值是 ___▲___.

9. 如图，长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的体积是 120，E 为 CC_1 的中点，则三棱锥 $E - BCD$ 的体积是 ___▲___.

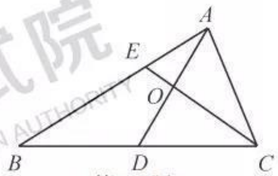


（第 9 题）

10. 在平面直角坐标系 xOy 中，P 是曲线 $y = x + \frac{4}{x}(x > 0)$ 上的一个动点，则点 P 到直线 $x + y = 0$ 的距离的最小值是 ___▲___.

11. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 在曲线 $y = \ln x$ 上，且该曲线在点 A 处的切线经过点 $(-\mathrm{e}, -1)$（e 为自然对数的底数），则点 A 的坐标是 ___▲___.

12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 的中点，E 在边 AB 上，$BE = 2EA$，AD 与 CE 交于点 O. 若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{EC}$，则 $\frac{AB}{AC}$ 的值是 ___▲___.



（第 12 题）

13. 已知 $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{2}{3}$，则 $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值是 ___▲___.

14. 设 $f(x)$，$g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的两个周期函数，$f(x)$ 的周期为 4，$g(x)$ 的周期为 2，且 $f(x)$ 是奇函数. 当 $x \in (0, 2]$ 时，$f(x) = \sqrt{1 - (x - 1)^2}$，$g(x) = \begin{cases} k(x + 2), & 0 < x \leqslant 1, \\ -\frac{1}{2}, & 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$ 其中 $k > 0$. 若在区间 $(0, 9]$ 上，关于 x 的方程 $f(x) = g(x)$ 有 8 个不同的实数根，则 k 的取值范围是 ___▲___.

二、解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分. 请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 14 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c.

（1）若 $a = 3c$，$b = \sqrt{2}$，$\cos B = \frac{2}{3}$，求 c 的值；

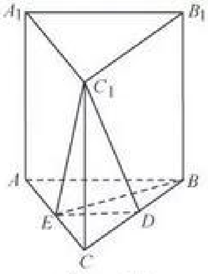
（2）若 $\frac{\sin A}{a} = \frac{\cos B}{2b}$，求 $\sin\left(B + \frac{\pi}{2}\right)$ 的值.

— 16 —

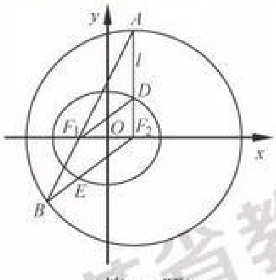
16.（本小题满分 14 分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D，E 分别为 BC，AC 的中点，$AB=BC$.

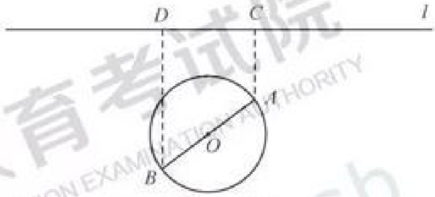
求证：(1) $A_1B_1 /\!/$ 平面 DEC_1；(2) $BE \perp C_1E$.



（第 16 题）



（第 17 题）



（第 18 题）

17.（本小题满分 14 分）

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的焦点为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$. 过 F_2 作 x 轴的垂线 l，在 x 轴的上方，l 与圆 F_2：$(x-1)^2+y^2=4a^2$ 交于点 A，与椭圆 C 交于点 D. 连结 AF_1 并延长交圆 F_2 于点 B，连结 BF_2 交椭圆 C 于点 E，连结 DF_1. 已知 $DF_1=\frac{5}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程；(2) 求点 E 的坐标.

18.（本小题满分 16 分）

如图，一个湖的边界是圆心为 O 的圆，湖的一侧有一条直线型公路 l，湖上有桥 AB（AB 是圆 O 的直径）. 规划在公路 l 上选两个点 P，Q，并修建两段直线型道路 PB，QA，规划要求：线段 PB，QA 上的所有点到点 O 的距离均不小于圆 O 的半径. 已知点 A，B 到直线 l 的距离分别为 AC 和 BD（C，D 为垂足），测得 $AB=10$，$AC=6$，$BD=12$（单位：百米）.

(1) 若道路 PB 与桥 AB 垂直，求道路 PB 的长；

(2) 在规划要求下，P 和 Q 中能否有一个点选在 D 处？并说明理由；

(3) 在规划要求下，若道路 PB 和 QA 的长度均为 d（单位：百米），求当 d 最小时，P，Q 两点间的距离.

19.（本小题满分 16 分）

设函数 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$，$a,b,c\in\mathbf{R}$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1) 若 $a=b=c$，$f(4)=8$，求 a 的值；

(2) 若 $a\neq b$，$b=c$，且 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的零点均在集合 $\{-3,1,3\}$ 中，求 $f(x)$ 的极小值；

(3) 若 $a=0$，$0<b\leqslant 1$，$c=1$，且 $f(x)$ 的极大值为 M，求证：$M\leqslant\frac{4}{27}$.

20.（本小题满分 16 分）

定义首项为 1 且公比为正数的等比数列为“M－数列”.

(1) 已知等比数列 $\{a_n\}\,(n\in\mathbf{N}^*)$ 满足：$a_2a_4=a_5$，$a_3-4a_2+4a_1=0$，求证：数列 $\{a_n\}$ 为“M－数列”；

(2) 已知数列 $\{b_n\}\,(n\in\mathbf{N}^*)$ 满足：$b_1=1$，$\frac{1}{S_n}=\frac{2}{b_n}-\frac{2}{b_{n+1}}$，其中 S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

① 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

② 设 m 为正整数. 若存在“M－数列”$\{c_n\}\,(n\in\mathbf{N}^*)$，对任意正整数 k，当 $k\leqslant m$ 时，都有 $c_k\leqslant b_k\leqslant c_{k+1}$ 成立，求 m 的最大值.

数学Ⅰ试题参考答案

一、填空题：本题考查基础知识、基本运算和基本思想方法. 每小题 5 分，共计 70 分.

1. $\{1,6\}$　　2. 2　　3. 5　　4. $[-1,7]$　　5. $\frac{5}{3}$

6. $\frac{7}{10}$　　7. $y=\pm\sqrt{2}x$　　8. 16　　9. 10　　10. 4

11. $(e,1)$　　12. $\sqrt{3}$　　13. $\frac{\sqrt{2}}{10}$　　14. $[\frac{1}{3},\frac{\sqrt{2}}{4})$

二、解答题

15. 本小题主要考查正弦定理、余弦定理、同角三角函数关系、诱导公式等基础知识，考查运算求解能力. 满分 14 分.

解：(1) 因为 $a=3c$，$b=\sqrt{2}$，$\cos B=\dfrac{2}{3}$，

由余弦定理 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，得 $\dfrac{2}{3}=\dfrac{(3c)^2+c^2-(\sqrt{2})^2}{2\times 3c\times c}$，即 $c^2=\dfrac{1}{3}$.

所以 $c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(2) 因为 $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\cos B}{2b}$，

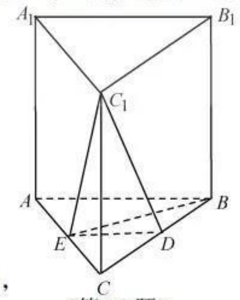
由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，得 $\dfrac{\cos B}{2b}=\dfrac{\sin B}{b}$，所以 $\cos B=2\sin B$.

从而 $\cos^2 B=(2\sin B)^2$，即 $\cos^2 B=4(1-\cos^2 B)$，故 $\cos^2 B=\dfrac{4}{5}$.

因为 $\sin B>0$，所以 $\cos B=2\sin B>0$，从而 $\cos B=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

因此 $\sin(B+\dfrac{\pi}{2})=\cos B=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

16. 本小题主要考查直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系等基础知识，考查空间想象能力和推理论证能力. 满分 14 分.



（第 16 题）

证明：(1) 因为 D，E 分别为 BC，AC 的中点，

所以 $ED /\!/ AB$.

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB /\!/ A_1B_1$，

所以 $A_1B_1 /\!/ ED$.

又因为 $ED\subset$ 平面 DEC_1，$A_1B_1\not\subset$ 平面 DEC_1，

所以 $A_1B_1 /\!/$ 平面 DEC_1.

(2) 因为 $AB=BC$，E 为 AC 的中点，所以 $BE\perp AC$.

因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直棱柱，所以 $C_1C\perp$ 平面 ABC.

又因为 $BE\subset$ 平面 ABC，所以 $C_1C\perp BE$.

因为 $C_1C\subset$ 平面 A_1ACC_1，$AC\subset$ 平面 A_1ACC_1，$C_1C\cap AC=C$，

所以 $BE\perp$ 平面 A_1ACC_1.

因为 $C_1E\subset$ 平面 A_1ACC_1，所以 $BE\perp C_1E$.

17. 本小题主要考查直线方程、圆的方程、椭圆方程、椭圆的几何性质、直线与圆及椭圆的位置关系等基础知识，考查推理论证能力、分析问题能力和运算求解能力. 满分 14 分.

解：(1) 设椭圆 C 的焦距为 $2c$.

因为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，所以 $F_1F_2=2$，$c=1$.

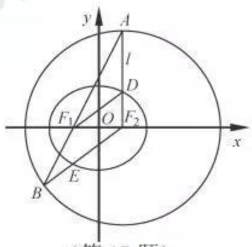
又因为 $DF_1=\dfrac{5}{2}$，$AF_2\perp x$ 轴，所以 $DF_2=\sqrt{DF_1^2-F_1F_2^2}=\sqrt{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-2^2}=\dfrac{3}{2}$.

因此 $2a=DF_1+DF_2=4$，从而 $a=2$.

由 $b^2=a^2-c^2$，得 $b^2=3$.

因此，椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2) 解法一：



（第 17 题）

由 (1) 知，椭圆 C：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，$a=2$.

因为 $AF_2\perp x$ 轴，所以点 A 的横坐标为 1.

将 $x=1$ 代入圆 F_2 的方程 $(x-1)^2+y^2=16$，解得 $y=\pm 4$.

因为点 A 在 x 轴上方，所以 $A(1,4)$.

又 $F_1(-1,0)$，所以直线 AF_1：$y=2x+2$.

由 $\begin{cases} y=2x+2, \\ (x-1)^2+y^2=16, \end{cases}$ 得 $5x^2+6x-11=0$，

解得 $x=1$ 或 $x=-\dfrac{11}{5}$.

将 $x=-\frac{11}{5}$ 代入 $y=2x+2$，得 $y=-\frac{12}{5}$.

因此 $B(-\frac{11}{5},-\frac{12}{5})$. 又 $F_2(1,0)$，所以直线 BF_2：$y=\frac{3}{4}(x-1)$.

由 $\begin{cases} y=\frac{3}{4}(x-1), \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 得 $7x^2-6x-13=0$，解得 $x=-1$ 或 $x=\frac{13}{7}$.

又因为 E 是线段 BF_2 与椭圆的交点，所以 $x=-1$.

将 $x=-1$ 代入 $y=\frac{3}{4}(x-1)$，得 $y=-\frac{3}{2}$. 因此 $E(-1,-\frac{3}{2})$.

解法二：

由(1)知，椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. 如图，连结 EF_1.

因为 $BF_2=2a$，$EF_1+EF_2=2a$，所以 $EF_1=EB$，

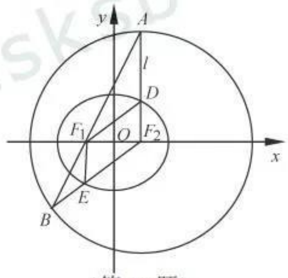
从而 $\angle BF_1E=\angle B$.

因为 $F_2A=F_2B$，所以 $\angle A=\angle B$.

所以 $\angle A=\angle BF_1E$，从而 $EF_1\,/\!/\,F_2A$.

因为 $AF_2\perp x$ 轴，所以 $EF_1\perp x$ 轴.

因为 $F_1(-1,0)$，由 $\begin{cases} x=-1, \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 得 $y=\pm\frac{3}{2}$.



（第 17 题）

又因为 E 是线段 BF_2 与椭圆的交点，所以 $y=-\frac{3}{2}$.

因此 $E(-1,-\frac{3}{2})$.

18. **本小题主要考查三角函数的应用、解方程、直线与圆等基础知识，考查直观想象和数学建模及运用数学知识分析和解决实际问题的能力. 满分 16 分.**

解：解法一：

(1) 过 A 作 $AE\perp BD$，垂足为 E.

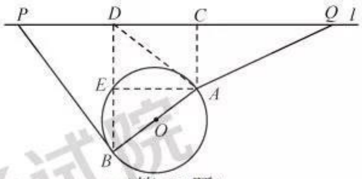
由已知条件得，四边形 $ACDE$ 为矩形，

$DE=BE=AC=6$，$AE=CD=8$.

因为 $PB\perp AB$，

所以 $\cos\angle PBD=\sin\angle ABE=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$.

所以 $PB=\frac{BD}{\cos\angle PBD}=\frac{12}{\frac{4}{5}}=15$.



（第 18 题）

因此道路 PB 的长为 15(百米).

(2) ① 若 P 在 D 处，由(1)可得 E 在圆上，则线段 BE 上的点(除 B，E)到点 O 的距离均小于圆 O 的半径，所以 P 选在 D 处不满足规划要求.

② 若 Q 在 D 处，连结 AD，由(1)知 $AD=\sqrt{AE^2+ED^2}=10$，

从而 $\cos\angle BAD=\frac{AD^2+AB^2-BD^2}{2AD\cdot AB}=\frac{7}{25}>0$，所以 $\angle BAD$ 为锐角.

所以线段 AD 上存在点到点 O 的距离小于圆 O 的半径.

因此 Q 选在 D 处也不满足规划要求.

综上，P 和 Q 均不能选在 D 处.

(3) 先讨论点 P 的位置.

当 $\angle OBP<90°$ 时，线段 PB 上存在点到点 O 的距离小于圆 O 的半径，点 P 不符合规划要求；

当 $\angle OBP\geqslant 90°$ 时，对线段 PB 上任意一点 F，$OF\geqslant OB$，即线段 PB 上所有点到点 O 的距离均不小于圆 O 的半径，点 P 符合规划要求.

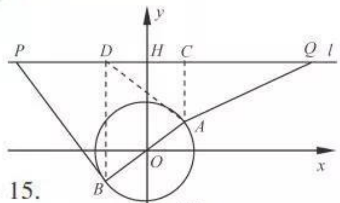
设 P_1 为 l 上一点，且 $P_1B\perp AB$，由(1)知，$P_1B=15$，

此时 $P_1D=P_1B\sin\angle P_1BD=P_1B\cos\angle EBA=15\times\frac{3}{5}=9$；

当$\angle OBP > 90°$时，在$\triangle PP_1B$中，$PB > P_1B = 15$.
由上可知，$d \geqslant 15$.
再讨论点Q的位置.
由(2)知，要使得$QA \geqslant 15$，点Q只有位于点C的右侧，才能符合规划要求. 当$QA = 15$时，$CQ = \sqrt{QA^2 - AC^2} = \sqrt{15^2 - 6^2} = 3\sqrt{21}$. 此时，线段$QA$上所有点到点$O$的距离均不小于圆$O$的半径.
综上，当$PB \perp AB$，点Q位于点C右侧，且$CQ = 3\sqrt{21}$时，d最小，此时P，Q两点间的距离$PQ = PD + CD + CQ = 17 + 3\sqrt{21}$.
因此，d最小时，P，Q两点间的距离为$17 + 3\sqrt{21}$(百米).

解法二：

(1) 如图，过O作$OH \perp l$，垂足为H.
以O为坐标原点，直线OH为y轴，建立平面直角坐标系.
因为$BD = 12$，$AC = 6$，所以$OH = 9$，直线l的方程为$y = 9$，点A，B的纵坐标分别为3，−3.
因为AB为圆O的直径，$AB = 10$，所以圆O的方程为$x^2 + y^2 = 25$.
从而$A(4, 3)$，$B(-4, -3)$，直线AB的斜率为$\frac{3}{4}$.



(第 18 题)

因为$PB \perp AB$，所以直线PB的斜率为$-\frac{4}{3}$，
直线PB的方程为$y = -\frac{4}{3}x - \frac{25}{3}$.
所以$P(-13, 9)$，$PB = \sqrt{(-13 + 4)^2 + (9 + 3)^2} = 15$.
因此道路PB的长为15(百米).

(2) ①若P在D处，取线段BD上一点$E(-4, 0)$，则$EO = 4 < 5$，所以P选在D处不满足规划要求.
②若Q在D处，连结AD，由(1)知$D(-4, 9)$，又$A(4, 3)$，
所以线段AD：$y = -\frac{3}{4}x + 6\ (-4 \leqslant x \leqslant 4)$.
在线段AD上取点$M(3, \frac{15}{4})$，因为$OM = \sqrt{3^2 + \left(\frac{15}{4}\right)^2} < \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$，
所以线段AD上存在点到点O的距离小于圆O的半径.
因此Q选在D处也不满足规划要求.
综上，P和Q均不能选在D处.

(3) 先讨论点P的位置.
当$\angle OBP < 90°$时，线段PB上存在点到点O的距离小于圆O的半径，点P不符合规划要求；
当$\angle OBP \geqslant 90°$时，对线段PB上任意一点F，$OF \geqslant OB$，即线段PB上所有点到点O的距离均不小于圆O的半径，点P符合规划要求.
设P_1为l上一点，且$P_1B \perp AB$，由(1)知，$P_1B = 15$，此时$P_1(-13, 9)$；
当$\angle OBP > 90°$时，在$\triangle PP_1B$中，$PB > P_1B = 15$.
由上可知，$d \geqslant 15$.
再讨论点Q的位置.
由(2)知，要使得$QA \geqslant 15$，点Q只有位于点C的右侧，才能符合规划要求. 当$QA = 15$时，设$Q(a, 9)$，由$AQ = \sqrt{(a - 4)^2 + (9 - 3)^2} = 15\ (a > 4)$，
得$a = 4 + 3\sqrt{21}$，所以$Q(4 + 3\sqrt{21}, 9)$. 此时，线段QA上所有点到点O的距离均不小于圆O的半径.
综上，当$P(-13, 9)$，$Q(4 + 3\sqrt{21}, 9)$时，d最小，此时P，Q两点间的距离$PQ = 4 + 3\sqrt{21} - (-13) = 17 + 3\sqrt{21}$.
因此，d最小时，P，Q两点间的距离为$17 + 3\sqrt{21}$(百米).

19. **本小题主要考查利用导数研究函数的性质，考查综合运用数学思想方法分析与解决问题以及逻辑推理能力. 满分16分.**

解： (1) 因为$a = b = c$，所以$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c) = (x - a)^3$.
因为$f(4) = 8$，所以$(4 - a)^3 = 8$，解得$a = 2$.

(2)因为 $b=c$，所以 $f(x)=(x-a)(x-b)^2=x^3-(a+2b)x^2+b(2a+b)x-ab^2$，

从而 $f'(x)=3(x-b)(x-\frac{2a+b}{3})$. 令 $f'(x)=0$，得 $x=b$ 或 $x=\frac{2a+b}{3}$.

因为 a，b，$\frac{2a+b}{3}$ 都在集合 $\{-3,1,3\}$ 中，且 $a\neq b$，

所以 $\frac{2a+b}{3}=1$，$a=3$，$b=-3$.

此时，$f(x)=(x-3)(x+3)^2$，$f'(x)=3(x+3)(x-1)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=-3$ 或 $x=1$. 列表如下：

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(1)=(1-3)(1+3)^2=-32$.

(3)因为 $a=0$，$c=1$，所以 $f(x)=x(x-b)(x-1)=x^3-(b+1)x^2+bx$，

$f'(x)=3x^2-2(b+1)x+b$.

因为 $0<b\leqslant 1$，所以 $\Delta=4(b+1)^2-12b=(2b-1)^2+3>0$，

则 $f'(x)$ 有 2 个不同的零点，设为 x_1，$x_2(x_1<x_2)$.

由 $f'(x)=0$，得 $x_1=\frac{b+1-\sqrt{b^2-b+1}}{3}$，$x_2=\frac{b+1+\sqrt{b^2-b+1}}{3}$.

列表如下：

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 的极大值 $M=f(x_1)$.

解法一：

$M=f(x_1)=x_1^3-(b+1)x_1^2+bx_1$

$=(3x_1^2-2(b+1)x_1+b)(\frac{x_1}{3}-\frac{b+1}{9})-\frac{2(b^2-b+1)}{9}x_1+\frac{b(b+1)}{9}$

$=\frac{-2(b^2-b+1)(b+1)}{27}+\frac{b(b+1)}{9}+\frac{2}{27}(\sqrt{b^2-b+1})^3$

$=\frac{b(b+1)}{27}-\frac{2(b-1)^2(b+1)}{27}+\frac{2}{27}(\sqrt{b(b-1)+1})^3$

$\leqslant\frac{b(b+1)}{27}+\frac{2}{27}\leqslant\frac{4}{27}$. 因此 $M\leqslant\frac{4}{27}$.

解法二：

因为 $0<b\leqslant 1$，所以 $x_1\in(0,1)$.

当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)=x(x-b)(x-1)\leqslant x(x-1)^2$.

令 $g(x)=x(x-1)^2$，$x\in(0,1)$，则 $g'(x)=3(x-\frac{1}{3})(x-1)$.

令 $g'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{3}$. 列表如下：

x	$(0,\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3},1)$
$g'(x)$	+	0	−
$g(x)$	↗	极大值	↘

所以当 $x=\frac{1}{3}$ 时，$g(x)$ 取得极大值，且是最大值，故 $g(x)_{\max}=g(\frac{1}{3})=\frac{4}{27}$.

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)\leqslant g(x)\leqslant\frac{4}{27}$. 因此 $M\leqslant\frac{4}{27}$.

20. **本小题主要考查等差和等比数列的定义、通项公式、性质等基础知识，考查代数推理、转化与化归及综合运用数学知识探究与解决问题的能力. 满分 16 分.**

解:(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，所以$a_1\neq 0$，$q\neq 0$.

由$\begin{cases}a_2a_4=a_5,\\a_3-4a_2+4a_1=0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}a_1^2q^4=a_1q^4,\\a_1q^2-4a_1q+4a_1=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a_1=1,\\q=2.\end{cases}$

因此数列$\{a_n\}$为"M－数列".

(2)①因为$\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{2}{b_n}-\dfrac{2}{b_{n+1}}$，所以$b_n\neq 0$.

由$b_1=1$，$S_1=b_1$，得$\dfrac{1}{1}=\dfrac{2}{1}-\dfrac{2}{b_2}$，则$b_2=2$.

由$\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{2}{b_n}-\dfrac{2}{b_{n+1}}$，得$S_n=\dfrac{b_nb_{n+1}}{2(b_{n+1}-b_n)}$，

当$n\geqslant 2$时，由$b_n=S_n-S_{n-1}$，得$b_n=\dfrac{b_nb_{n+1}}{2(b_{n+1}-b_n)}-\dfrac{b_{n-1}b_n}{2(b_n-b_{n-1})}$，

整理得$b_{n+1}+b_{n-1}=2b_n$.

所以数列$\{b_n\}$是首项和公差均为 1 的等差数列.

因此，数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=n\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

②由①知，$b_k=k$，$k\in\mathbf{N}^*$.

因为数列$\{c_n\}$为"M－数列"，设公比为q，所以$c_1=1$，$q>0$.

因为$c_k\leqslant b_k\leqslant c_{k+1}$，所以$q^{k-1}\leqslant k\leqslant q^k$，其中$k=1,2,3,\cdots,m$.

当$k=1$时，有$q\geqslant 1$；

当$k=2,3,\cdots,m$时，有$\dfrac{\ln k}{k}\leqslant \ln q\leqslant \dfrac{\ln k}{k-1}$.

设$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}\ (x>1)$，则$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

令$f'(x)=0$，得$x=e$. 列表如下：

x	$(1,e)$	e	$(e,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	极大值	↘

因为$\dfrac{\ln 2}{2}=\dfrac{\ln 8}{6}<\dfrac{\ln 9}{6}=\dfrac{\ln 3}{3}$，所以$f(k)_{\max}=f(3)=\dfrac{\ln 3}{3}$.

取$q=\sqrt[3]{3}$，当$k=1,2,3,4,5$时，$\dfrac{\ln k}{k}\leqslant \ln q$，即$k\leqslant q^k$，经检验知$q^{k-1}\leqslant k$也成立. 因此所求$m$的最大值不小于 5.

若$m\geqslant 6$，分别取$k=3,6$，得$3\leqslant q^3$，且$q^5\leqslant 6$，从而$q^{15}\geqslant 243$，且$q^{15}\leqslant 216$，所以q不存在. 因此所求m的最大值小于 6.

综上，所求m的最大值为 5.

数学Ⅱ(附加题)

21. **【选做题】本题包括 A、B、C 三小题，请选定其中两小题，并在相应的答题区域内作答. 若多做，则按作答的前两小题评分. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

A.［选修 4-2：矩阵与变换］(本小题满分 10 分)

已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1\\2&2\end{bmatrix}$.

(1)求$\boldsymbol{A}^2$；(2)求矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值.

B.［选修 4-4：坐标系与参数方程］(本小题满分 10 分)

在极坐标系中，已知两点$A(3,\dfrac{\pi}{4})$，$B(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{2})$，直线$l$的方程为$\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})=3$.

(1)求A，B两点间的距离；(2)求点B到直线l的距离.

C.［选修 4-5：不等式选讲］(本小题满分 10 分)

设$x\in\mathbf{R}$，解不等式$|x|+|2x-1|>2$.

— 22 —

【必做题】第 22 题、第 23 题，每题 10 分，共计 20 分. 请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

22.（本小题满分 10 分）

设 $(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，$n\geqslant 4$，$n\in\mathbf{N}^*$. 已知 $a_3^2=2a_2a_4$.

(1)求 n 的值；(2)设 $(1+\sqrt{3})^n=a+b\sqrt{3}$，其中 a，$b\in\mathbf{N}^*$，求 a^2-3b^2的值.

23.（本小题满分 10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，设点集 $A_n=\{(0,0),(1,0),(2,0),\cdots,(n,0)\}$，$B_n=\{(0,1),(n,1)\}$，$C_n=\{(0,2),(1,2),(2,2),\cdots,(n,2)\}$，$n\in\mathbf{N}^*$. 令 $M_n=A_n\cup B_n\cup C_n$. 从集合 M_n 中任取两个不同的点，用随机变量 X 表示它们之间的距离.

(1)当 $n=1$ 时，求 X 的概率分布；

(2)对给定的正整数 n $(n\geqslant 3)$，求概率 $P(X\leqslant n)$（用 n 表示）.

数学Ⅱ（附加题）参考答案

21.【选做题】

A.［选修 4–2：矩阵与变换］

本小题主要考查矩阵的运算、特征值等基础知识，考查运算求解能力. 满分 10 分.

解：(1)因为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1\\2&2\end{bmatrix}$，

所以 $\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}3&1\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\2&2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}3\times3+1\times2&3\times1+1\times2\\2\times3+2\times2&2\times1+2\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11&5\\10&6\end{bmatrix}$.

(2)矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1\\-2&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+4.$$

令 $f(\lambda)=0$，解得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=4$.

B.［选修 4–4：坐标系与参数方程］

本小题主要考查曲线的极坐标方程等基础知识，考查运算求解能力. 满分 10 分.

解：(1)设极点为 O. 在△OAB 中，$A(3,\frac{\pi}{4})$，$B(\sqrt{2},\frac{\pi}{2})$，

由余弦定理，得 $AB=\sqrt{3^2+(\sqrt{2})^2-2\times3\times\sqrt{2}\times\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}=\sqrt{5}$.

(2)因为直线 l 的方程为 $\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=3$，

则直线 l 过点 $(3\sqrt{2},\frac{\pi}{2})$，倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$.

又 $B(\sqrt{2},\frac{\pi}{2})$，所以点 B 到直线 l 的距离为 $(3\sqrt{2}-\sqrt{2})\times\sin(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2})=2$.

C.［选修 4–5：不等式选讲］

本小题主要考查解不等式等基础知识，考查运算求解和推理论证能力. 满分 10 分.

解：当 $x<0$ 时，原不等式可化为 $-x+1-2x>2$，解得 $x<-\frac{1}{3}$；

当 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，原不等式可化为 $x+1-2x>2$，即 $x<-1$，无解；

当 $x>\frac{1}{2}$ 时，原不等式可化为 $x+2x-1>2$，解得 $x>1$.

综上，原不等式的解集为 $\{x\mid x<-\frac{1}{3}$ 或 $x>1\}$.

22.**【必做题】本小题主要考查二项式定理、组合数等基础知识，考查分析问题能力与运算求解能力. 满分 10 分.**

解：(1)因为 $(1+x)^n=\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1x+\mathrm{C}_n^2x^2+\cdots+\mathrm{C}_n^nx^n$，$n\geqslant 4$，

所以 $a_2=\mathrm{C}_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$，$a_3=\mathrm{C}_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$，

$a_4=C_n^4=\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$.

因为 $a_3^2=2a_2a_4$,

所以 $\left(\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}\right)^2=2\times\dfrac{n(n-1)}{2}\times\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$.

解得 $n=5$.

(2)由(1)知, $n=5$.

$(1+\sqrt{3})^n=(1+\sqrt{3})^5$

$=C_5^0+C_5^1\sqrt{3}+C_5^2(\sqrt{3})^2+C_5^3(\sqrt{3})^3+C_5^4(\sqrt{3})^4+C_5^5(\sqrt{3})^5$

$=a+b\sqrt{3}$.

解法一:

因为 $a, b\in\mathbf{N}^*$, 所以 $a=C_5^0+3C_5^2+9C_5^4=76$, $b=C_5^1+3C_5^3+9C_5^5=44$,

从而 $a^2-3b^2=76^2-3\times44^2=-32$.

解法二:

$(1-\sqrt{3})^5=C_5^0+C_5^1(-\sqrt{3})+C_5^2(-\sqrt{3})^2+C_5^3(-\sqrt{3})^3+C_5^4(-\sqrt{3})^4+C_5^5(-\sqrt{3})^5$

$=C_5^0-C_5^1\sqrt{3}+C_5^2(\sqrt{3})^2-C_5^3(\sqrt{3})^3+C_5^4(\sqrt{3})^4-C_5^5(\sqrt{3})^5$.

因为 $a, b\in\mathbf{N}^*$, 所以 $(1-\sqrt{3})^5=a-b\sqrt{3}$.

因此 $a^2-3b^2=(a+b\sqrt{3})(a-b\sqrt{3})=(1+\sqrt{3})^5\times(1-\sqrt{3})^5=(-2)^5=-32$.

23.**【必做题】本小题主要考查计数原理、古典概型、随机变量及其概率分布等基础知识,考查逻辑思维能力和推理论证能力.满分 10 分.**

解: (1)当 $n=1$ 时, X 的所有可能取值是 $1, \sqrt{2}, 2, \sqrt{5}$.

X 的概率分布为 $P(X=1)=\dfrac{7}{C_6^2}=\dfrac{7}{15}$, $P(X=\sqrt{2})=\dfrac{4}{C_6^2}=\dfrac{4}{15}$,

$P(X=2)=\dfrac{2}{C_6^2}=\dfrac{2}{15}$, $P(X=\sqrt{5})=\dfrac{2}{C_6^2}=\dfrac{2}{15}$.

(2)设 $A(a, b)$ 和 $B(c, d)$ 是从 M_n 中取出的两个点.

因为 $P(X\leqslant n)=1-P(X>n)$, 所以仅需考虑 $X>n$ 的情况.

① 若 $b=d$, 则 $AB\leqslant n$, 不存在 $X>n$ 的取法;

② 若 $b=0, d=1$, 则 $AB=\sqrt{(a-c)^2+1}\leqslant\sqrt{n^2+1}$, 所以 $X>n$ 当且仅当 $AB=\sqrt{n^2+1}$, 此时 $a=0, c=n$ 或 $a=n, c=0$, 有 2 种取法;

③ 若 $b=0, d=2$, 则 $AB=\sqrt{(a-c)^2+4}\leqslant\sqrt{n^2+4}$. 因为当 $n\geqslant3$ 时, $\sqrt{(n-1)^2+4}\leqslant n$, 所以 $X>n$ 当且仅当 $AB=\sqrt{n^2+4}$, 此时 $a=0, c=n$ 或 $a=n, c=0$, 有 2 种取法;

④ 若 $b=1, d=2$, 则 $AB=\sqrt{(a-c)^2+1}\leqslant\sqrt{n^2+1}$, 所以 $X>n$ 当且仅当 $AB=\sqrt{n^2+1}$, 此时 $a=0, c=n$ 或 $a=n, c=0$, 有 2 种取法.

综上, 当 $X>n$ 时, X 的所有可能取值是 $\sqrt{n^2+1}$ 和 $\sqrt{n^2+4}$, 且

$$P(X=\sqrt{n^2+1})=\frac{4}{C_{2n+4}^2},\ P(X=\sqrt{n^2+4})=\frac{2}{C_{2n+4}^2}.$$

因此, $P(X\leqslant n)=1-P(X=\sqrt{n^2+1})-P(X=\sqrt{n^2+4})=1-\dfrac{6}{C_{2n+4}^2}$.

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注自主招生在线官方微信号：zizzsw。

微信扫一扫，快速关注