蓉城名校联盟 2021～2022 学年度上期高中 2019 级入学联考
文科数学参考答案及评分标准

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1～5　BACCD　　6～10　BDBCA　　11～12　AA

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．21　　14．1　　15．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　16．$3\sqrt{7}$

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）

解：（1）设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q．

由 $a_4-3a_2=4$，$a_3=8$．

得 $\begin{cases}a_1q^3-3a_1q=4\\ a_1q^2=8\end{cases}$，…………1 分

两式相除，得 $\dfrac{q^2-3}{q}=\dfrac{1}{2}$，即 $2q^2-q-6=0$，

解得 $q=2$ 或 $q=-\dfrac{3}{2}$ …………3 分

$\because q>0$

$\therefore q=2$，$a_1=2$ …………5 分

$\therefore a_n=2^n$； …………6 分

（2）$\log_2 a_n=n$ …………7 分

则 $b_n=n+(n+1)+(n+2)+\cdots+2n=\dfrac{(n+1)(n+2n)}{2}=\dfrac{3n(n+1)}{2}$ …………8 分

$\therefore \dfrac{1}{b_n}=\dfrac{2}{3n(n+1)}=\dfrac{2}{3}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$ …………9 分

$\therefore S_n=\dfrac{2}{3}(1-\dfrac{1}{2})+\dfrac{2}{3}(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+\dfrac{2}{3}(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4})+\cdots+\dfrac{2}{3}(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n})+\dfrac{2}{3}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$

$=\dfrac{2}{3}(1-\dfrac{1}{n+1})$ …………11 分

$=\dfrac{2n}{3(n+1)}$． …………12 分

18．（12 分）

解：（1）填写 2×2 列联表如下：

	严格遵守交通法第 47 条规定	不严格遵守交通法第 47 条规定	合计
年均违法记录不超过 3 次	28	42	70
年均违法记录超过 3 次	4	26	30
合计	32	68	100

…………4 分

$K^2=\dfrac{100\times(28\times26-42\times4)^2}{70\times30\times32\times68}=\dfrac{350}{51}\approx6.86>6.635$ …………7 分

所以，有超过 99%的把握认为机动车驾驶员年均违法记录超过 3 次与不严格遵守交通法第 47 条规定有关． …………8 分

（2）设年均交通违法次数为 8 次的 3 人为 A，B，C，9 次的 2 人为 d，e，10 次的 1 人为 F.

从 6 人中选出 2 人的情况有 AB，AC，Ad，Ae，AF，BC，Bd，Be，BF，Cd，Ce，CF，de，dF，eF，共 15 种情况，　……………………………………………………10 分

其中，恰有一人为 9 次的有 Ad，Ae，Bd，Be，Cd，Ce，dF，eF 这 8 种情况．………11 分

所以，恰有一人为 9 次的概率为 $\frac{8}{15}$．　………………………………12 分

19．（12 分）

解：（1）连接 FG， EG．

$\because F$， G 分别为 AC， AB 中点，

$\therefore FG /\!/ CB$，……………………………………………1 分

又 $\because FG \not\subset$ 平面 BCD， $BC \subset$ 平面 BCD

$\therefore FG /\!/$ 平面 BCD ……………………………………2 分

梯形 $ABDE$ 中， $AB \perp AE$， $DE \perp AE$，

$\therefore ED /\!/ AB$，即 $ED /\!/ GB$

$\because AB = 2$， $ED = 1$， G 为 AB 中点，

$\therefore ED = GB$

所以四边形 $GBDE$ 为平行四边形，

$\therefore EG /\!/ DB$，……………………………………………4 分

又 $\because EG \not\subset$ 平面 BCD， $BD \subset$ 平面 BCD

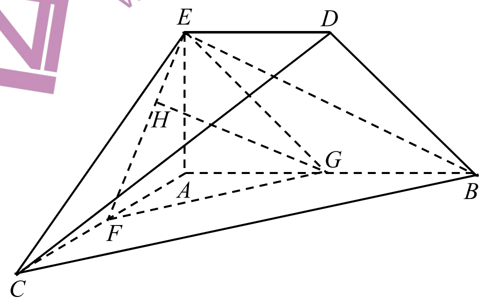
$\therefore EG /\!/$ 平面 BCD

$\because EG \cap FG = G$，

$\therefore$ 平面 $EFG /\!/$ 平面 BCD．　…………………………5 分

$\because GH \subset$ 平面 EFG，

$\therefore GH /\!/$ 平面 BCD.　……………………………………………………6 分



（2）$\because$ 平面 $ABDE \perp$ 平面 ABC 于 AB， $AB \perp AC$， $AC \subset$ 平面 ABC，

$\therefore AC \perp$ 平面 $ABDE$．　…………………………………………………9 分

$\therefore V_{C-BED} = \frac{1}{3} S_{\Delta BDE} \cdot AC = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot ED \cdot AE \cdot AC = \frac{1}{6} \times 1 \times 1 \times 2 = \frac{1}{3}$.　…………12 分

20．（12 分）

解：（1） $f'(x) = -2(x+1)e^x + a(x^2 + 2x + 1) = (x+1)(-2e^x + ax + a)$，　…………1 分

因为 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 内为减函数，

所以 $f'(x) \le 0$，即 $-2e^x + ax + a \le 0 \Leftrightarrow a \le \frac{2e^x}{x+1}$　……………………2 分

设 $g(x) = \frac{2e^x}{x+1} (x > -1)$， $g'(x) = \frac{2xe^x}{(x+1)^2}$　……………………………3 分

则 $g(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内为减函数，在 $(0, +\infty)$ 内为增函数，　…………4 分

$\therefore g(x)_{\min} = g(0) = 2$

$\therefore a \le 2$．……………………………………………………………5 分

（2） $f(x) = -2xe^x + e(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x)$， $x>0$

则 $f'(x) = -2(x+1)e^x + e(x^2 + 2x + 1) = (x+1)(-2e^x + ex + e)$　…………6 分

设 $h(x) = -2e^x + ex + e \ (x > 0)$，则 $h'(x) = -2e^x + e$　……………………7 分

由 $h'(x) > 0$ 得 $x < \ln\frac{e}{2}$，由 $h'(x) < 0$ 得 $x > \ln\frac{e}{2}$.

于是 $h(x)$ 在 $(0, \ln\frac{e}{2}]$ 上为增函数； $h(x)$ 在 $[\ln\frac{e}{2}, +\infty)$ 上为减函数；……8 分

$\because h(\ln\frac{e}{2}) = e\ln\frac{e}{2} > 0$，$h(0) = -2 + e > 0$，$h(1) = 0$ ……………………………………9 分

则在 $(0,1)$ 内 $h(x) > 0$；在 $(1,+\infty)$ 内 $h(x) < 0$． ……………………………………10 分

故在 $(0,1)$ 内 $f'(x) > 0$，$f(x)$ 为增函数；在 $(1,+\infty)$ 内 $f'(x) < 0$，$f(x)$ 为减函数． ……11 分

$\therefore f(x)$ 的极大值为 $f(1) = \frac{e}{3}$． ……………………………………………………12 分

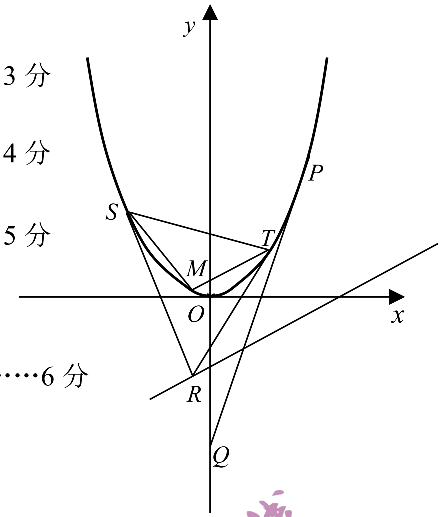
21．（12 分）

解：（1）$y = x^2$ 求导得 $y' = 2x$ ……………………………………………1 分

设 $P(x_1, x_1^2)$，$x_1 \neq 0$，

l 方程为 $y - x_1^2 = 2x_1(x - x_1)$，化简得 $y = 2x_1x - x_1^2$ ① ……………2 分

当 $x = 0$ 时，$y = -x_1^2$，则 $Q(0, -x_1^2)$



线段 PQ 的中点坐标为 $(\frac{x_1}{2}, 0)$， ……………………………………3 分

中垂线方程为 $y = -\frac{1}{2x_1}(x - \frac{x_1}{2})$，即 $y = -\frac{1}{2x_1}x + \frac{1}{4}$， ………4 分

所以，线段 PQ 的中垂线过定点 $(0, \frac{1}{4})$． ………………………………5 分

（2）设 $R(x_0, \frac{1}{2}x_0 - 1)$，$S(x_2, y_2)$，$T(x_3, y_3)$

由（1）中方程①知切线 $RS: y = 2x_2x - x_2^2$，$RT: y = 2x_3x - x_3^2$……6 分

$R(x_0, \frac{x_0}{2} - 1)$ 分别代入，得

$x_2^2 - 2x_0x_2 + \frac{x_0}{2} - 1 = 0$，$x_3^2 - 2x_0x_3 + \frac{x_0}{2} - 1 = 0$

故 x_2，x_3 为方程 $x^2 - 2x_0x + \frac{x_0}{2} - 1 = 0$ 的两根

则 $x_2 + x_3 = 2x_0$，$x_2x_3 = \frac{x_0}{2} - 1$ ……………………………………………7 分

直线 ST 的方程为 $y - x_2^2 = \frac{x_3^2 - x_2^2}{x_3 - x_2}(x - x_2)$，

化简得 $y = (x_2 + x_3)x - x_2x_3$，即 $y = 2x_0x - \frac{x_0}{2} + 1$

$\therefore |ST| = \sqrt{1 + 4x_0^2}\,|x_2 - x_3| = 2\sqrt{1 + 4x_0^2} \cdot \sqrt{x_0^2 - \frac{1}{2}x_0 + 1}$． ………………………8 分

抛物线上 S、T 之间到直线 ST 的距离最大的点为平行于 ST 的切线的切点，

设 $M(x_4, x_4^2)$，则 $2x_4 = 2x_0$，$\therefore x_4 = x_0$，$M(x_0, x_0^2)$， ……………………………9 分

M 到直线 ST 的距离 $d = \dfrac{|x_0^2 - \frac{x_0}{2} + 1|}{\sqrt{1 + 4x_0^2}}$． ………………………………10 分

则 $S_{\triangle RST} = \frac{1}{2}|ST| \cdot d = \dfrac{|x_0^2 - \frac{x_0}{2} + 1|}{2\sqrt{1 + 4x_0^2}} \cdot 2\sqrt{1 + 4x_0^2} \cdot \sqrt{x_0^2 - \frac{x_0}{2} + 1}$

$= \sqrt{(x_0^2 - \frac{1}{2}x_0 + 1)^3} = \sqrt{[(x_0 - \frac{1}{4})^2 + \frac{15}{16}]^3}$ ……………………………11 分

当 $x_0 = \frac{1}{4}$ 时，$S_{\triangle RST}$ 有最小值 $\frac{15\sqrt{15}}{64}$． ………………………………12 分

22.（10 分）

解：（1）由 $\begin{cases} x=2+3t \\ y=4t \end{cases}$ 消去参数得直线 l 的普通方程为 $x=2+\frac{3}{4}y$，

即 $4x-3y-8=0$；　　……………………………………2 分

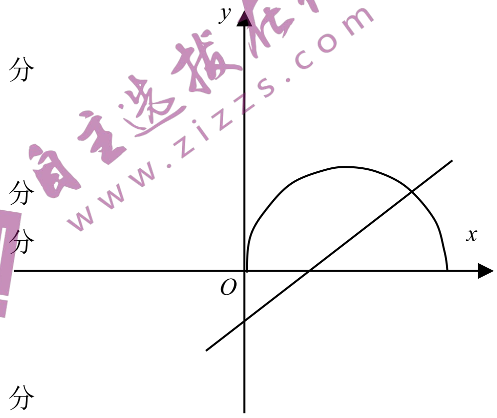
由 $\rho=6\cos\theta$，得 $\rho^2=6\rho\cos\theta$，

化为直角坐标方程，得 $x^2+y^2=6x$．　　……………………3 分

$\because 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，

$\therefore y=\rho\sin\theta\ge 0$．……………………………………………………4 分

$\therefore C$ 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-6x=0(y\ge 0)$；　　…………5 分



（2）$C:(x-3)^2+y^2=9(y\ge 0)$，

表示圆心为 $C(3,0)$，半径为 $r=3$ 的半圆.

圆心到直线 l 的距离为 $d=\frac{|4\times 3-3\times 0-8|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{4}{5}$，　　………6 分

如图，直线 l 与半圆 C 相交，则曲线 C 上的点到直线 l 的距离的最小值为 0，　　…………7 分

直线 l 左上方的圆弧上的点到直线 l 的最大距离为 $r-d=\frac{11}{5}$，　　…………………………8 分

在直线 l 右下方的圆弧上，点 $(6,0)$ 到直线 l 的距离最大，为 $\frac{|4\times 6-3\times 0-8|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{16}{5}$．　……9 分

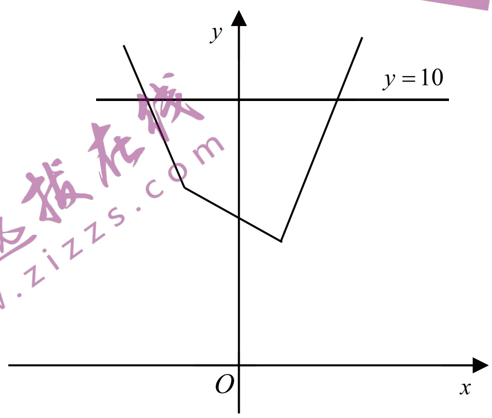
所以，曲线 C 上的点到直线 l 的距离的最小值为 0，最大值为 $\frac{16}{5}$．　　……………………10 分

23.（10 分）

解：（1）$g(x)=f(x)+|x-1|=3|x-1|+|2x+3|=\begin{cases} 5x，\ x\ge 1 \\ -x+6，\ -\frac{3}{2}\le x\le 1 \\ -5x，\ x\le -\frac{3}{2} \end{cases}$ ……………………………2 分

$g(x)$ 的图象如图所示，　　……………………………………4 分

结合计算，得不等式的解集为 $\{x|-2\le x\le 2\}$；　　……………………………5 分



（2）$|2x-2|+|2x+3|\ge|(2x-2)-(2x+3)|=5$，　　……………………………6 分

当且仅当 $(2x-2)(2x+3)\le 0$，即 $-\frac{3}{2}\le x\le 1$ 时，等号成立，

$\therefore f(x)$ 的最小值为 5，则 $a+3b=5$，　　……………………………7 分

由柯西不等式，$(a^2+b^2)(1^2+3^2)\geq(a+3b)^2=25$，

即 $a^2+b^2\geq\frac{5}{2}$，……………………………………8 分

当且仅当 $\frac{a}{1}=\frac{b}{3}$，即 $b=3a$ 等号成立，

由 $\begin{cases}a+3b=5\\ b=3a\end{cases}$ 解得 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{3}{2}$．……………………………………9 分

$\therefore a^2+b^2$ 的最小值为 $\frac{5}{2}$．……………………………………10 分