贵州省模理科答案

贵州省2023年普通高等学校招生适应性测试

理科数学参考答案及评分建议

一、选择题（每小题5分，共60分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	B	C	D	C	B	B	C	C	A	B	A

二、填空题（每小题5分，共20分）

13. $\dfrac{15}{4}$　　14. $x-2y-5=0$　　15. 3　　16. $\dfrac{41\pi}{4}$

三、解答题

（一）必考题

17. 解：

（1）已知 $S_n=2^n+a$．

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2+a$；……1分

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n-1}$……4分

由数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，可得 $2+a=1$，即 $a=-1$．

又 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{2^n}{2^{n-1}}=2$，所以 $q=2$．……6分

（2）因为 $b_n=\log_2 a_n=\log_2 2^{n-1}=n-1$．

所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=0+1+\cdots+n-1=\dfrac{n(n-1)}{2}$，……8分

所以 $\dfrac{1}{T_2}+\dfrac{1}{T_3}+\cdots+\dfrac{1}{T_{n+1}}=2(\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{n\times(n+1)})$

$=2(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$

$=2(1-\dfrac{1}{n+1})=\dfrac{2n}{n+1}$．……12分

18．解：

（1）由题意知：$D_1E\perp$ 平面ABC，$BC\subset$ 平面ABC，

所以 $D_1E\perp BC$． …………………………………………………………………… 2 分

又 $BC\perp AB$， $AB\subset$ 平面D_1AB， $D_1E\subset$ 平面D_1AB，且 $AB\cap D_1E=E$，

所以 $BC\perp$ 平面D_1AB． ……………………………………………………………… 5 分

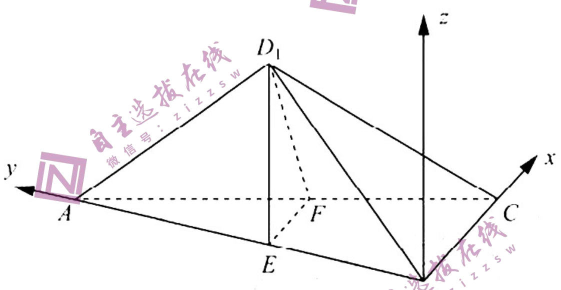
又 $AD_1\subset$ 平面D_1AB，故 $BC\perp AD_1$，即 $AD_1\perp BC$． ……………………………… 6 分

（2）过 E 作 $EF/\!/BC$ 交 AC 于 F，连结 D_1F，

由于 $EF/\!/BC$， $BC\not\subset$ 平面D_1EF， $EF\subset$ 平面D_1EF，

所以 $BC/\!/$ 平面 D_1EF．故平面 D_1EF 即为平面 α． …………………………… 8 分

建立如图所示空间直角坐标系．



由于 $AB\perp BC$，$EF/\!/BC$，故 $AB\perp EF$．

又 $AB\perp D_1E$， $EF\subset\alpha$，$D_1E\subset\alpha$，$D_1E\cap EF=E$．

因此 $AB\perp\alpha$，故 $\overrightarrow{BA}$ 是 α 的一个法向量．

由（1）易知 $D_1A\perp D_1B$，则在 $\triangle ABD_1$ 中可得

$$D_1B=\sqrt{AB^2-D_1A^2}=\sqrt{7},D_1E=\frac{3\sqrt{7}}{4},BE=\frac{7}{4}.$$

则 $A(0,4,0)$， $C(3,0,0)$， $D_1(0,\frac{7}{4},\frac{3\sqrt{7}}{4})$．

$\overrightarrow{BA}=(0,4,0),\overrightarrow{D_1C}=(3,-\frac{7}{4},-\frac{3\sqrt{7}}{4})$． ………………………………… 10 分

设 D_1C 与 α 所成角为 θ，则

$$\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{D_1C}\right\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{D_1C}\right|}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\times\left|\overrightarrow{D_1C}\right|}=\frac{\left|0\times3+4\times(-\frac{7}{4})+0\times(-\frac{3\sqrt{7}}{4})\right|}{4\times4}=\frac{7}{16}.$$

即 D_1C 与平面 α 所成角的正弦值为 $\frac{7}{16}$． ………………………………………… 12 分

19．解：

（1）记事件 $A=$“小明先答对甲类一道试题”，$B=$“小明继续答对另一道甲类试题”，$C=$“小明答对乙类试题”，$D=$“小明答对丙类试题”，

则 $P(A)=P(B)=\dfrac{3}{4}$，$P(C)=\dfrac{2}{3}$，$P(D)=\dfrac{1}{2}$．……………………………………… 2 分

记事件 $E=$“小明答题次数恰好为3次”，则 $E=(AC)\cup(\bar{A}B\bar{C})$．

$P(E)=P(AC)+P(\bar{A}B\bar{C})=P(A)P(C)+P(\bar{A})P(B)P(\bar{C})=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{9}{16}$，

即小明答题次数恰好为3次的概率为 $\dfrac{9}{16}$．……………………………………………… 6 分

（2）设小明竞赛得分为 X，由方案二知 X 的可能值为0，10，40，60．

$P(X=0)=P(\bar{A}\bar{B})=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{16}$

$P(X=10)=P(A\bar{D})+P(\bar{A}B\bar{D})=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{15}{32}$

$P(X=40)=P(AD\bar{C})+P(\bar{A}BD\bar{C})=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{32}$

$P(X=60)=P(ADC)+P(\bar{A}BDC)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{10}{32}$．

$E(X)=10\times\dfrac{15}{32}+40\times\dfrac{5}{32}+60\times\dfrac{10}{32}=\dfrac{475}{16}$ ……………………………………… 10 分

因为 $\dfrac{125}{4}>\dfrac{475}{16}$，所以选择方案一．……………………………………………… 12 分

20．解：

（1）设直线 l 的方程为 $x=my+4$，代入 $y^2=2px$ 并整理得 $y^2-2mpy-8p=0$．

$\Delta=(-2mp)^2+32p=4m^2p^2+32p>0$．

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1y_2=-8p$，$x_1x_2=\dfrac{y_1^2}{2p}\cdot\dfrac{y_2^2}{2p}=\dfrac{64p^2}{4p^2}=16$，……………… 3 分

由 $OA\perp OB$ 得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，即 $x_1x_2+y_1y_2=0$，

所以 $16-8p=0$，即 $p=2$，故抛物线的方程为 $y^2=4x$．………………………… 6 分

（2）假设存在满足条件的点 $T(t,0)$，使 $k_{TA}+k_{TB}=k$．

由（1）知 $y_1+y_2=4m, y_1y_2=-16$，所以

$$k=k_{TA}+k_{TB}=\frac{y_1}{x_1-t}+\frac{y_2}{x_2-t}=\frac{y_1(my_2+4-t)+y_2(my_1+4-t)}{(my_1+4-t)(my_2+4-t)}$$

$$=\frac{2my_1y_2+(4-t)(y_1+y_2)}{m^2y_1y_2+m(4-t)(y_1+y_2)+(4-t)^2}$$

$$=\frac{-32m+4(4-t)m}{-16m^2+4m^2(4-t)+(4-t)^2}=\frac{-4m(t+4)}{-4m^2t+(4-t)^2}$$ ．……………………………9 分

化简可得：$4tkm^2-4(t+4)m-k(4-t)^2=0$．

因为上式对 $m\in\mathbf{R}$ 恒成立，所以 $\begin{cases}tk=0,\\ t+4=0,\\ k(4-t)^2=0,\end{cases}$

解得 $t=-4, k=0$．

所以，在 x 轴上存在点 $T(-4,0)$，使得直线 TA 与直线 TB 的斜率之和为 0．

……………………………………………………………………………………………12 分

21．解：

（1）当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$F(x)=f(x)-g(x)=e^x-\dfrac{1}{2}x^2-x-1$（$x\in\mathbf{R}$）

$F'(x)=e^x-x-1$ ……………………………………………………………………… 2 分

令 $h(x)=F'(x)$，有 $h'(x)=e^x-1$，

当 $x\in(-\infty,0)$，$h'(x)<0$；$x\in(0,+\infty)$，$h'(x)>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

故 $h(x)\geqslant h(0)=0$，即 $F'(x)\geqslant 0$，……………………………………………… 5 分

所以 $F(x)=f(x)-g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增．…………………………………………… 6 分

（2）设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 与曲线 $y=g(x)$ 在 $(x_2,g(x_2))$ 的切线相同，

则切线方程为 $y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$，即 $y-e^{x_1}-x_1=(e^{x_1}+1)(x-x_1)$，

整理得 $y=(e^{x_1}+1)x-e^{x_1}x_1+e^{x_1}$．

又切线方程也可表示为 $y-g(x_2)=g'(x_2)(x-x_2)$，

即 $y-ax_2^{\ 2}-2x_2-1=(2ax_2+2)(x-x_2)$

整理得 $y=(2ax_2+2)x-ax_2^{\ 2}+1$

所以 $\begin{cases} e^{x_1}+1=2ax_2+2 \\ -e^{x_1}x_1+e^{x_1}=-ax_2^{\ 2}+1 \end{cases}$

消 x_2 整理得 $e^{2x_1}-4ax_1e^{x_1}+(4a-2)e^{x_1}-4a+1=0$． ………………………………… 9 分

令 $m(x)=e^{2x}-4axe^{x}+(4a-2)e^{x}-4a+1$，

$m'(x)=2e^{2x}-4ae^{x}-4axe^{x}+(4a-2)e^{x}=2e^{x}(e^{x}-2ax-1)$

令 $\varphi(x)=e^{x}-2ax-1$，因为 $a<0$，所以 $\varphi(x)$ 在 **R** 单调递增，又 $\varphi(0)=0$，

当 $x\in(-\infty,0)$，$\varphi(x)<0$；$x\in(0,+\infty)$，$\varphi(x)>0$，

又 $e^{x}>0$ 得，所以 $x\in(-\infty,0)$，$m'(x)<0$；$x\in(0,+\infty)$，$m'(x)>0$，

所以 $m(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

所以 $m(x)\geqslant m(0)=0$，

因此函数 $y=m(x)$ 只有一个零点，即 $e^{2x_1}-4ax_1e^{x_1}+(4a-2)e^{x_1}-4a+1=0$ 只有一个解 $x_1=0$，此时切线方程为 $y=2x+1$，所以曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的公切线方程为 $y=2x+1$． …………………………………………………………………… 12 分

（二）选考题

22．解：

（1）将曲线C的参数方程$\begin{cases} x=t \\ y=\dfrac{\lambda}{t} \end{cases}$消去$t$，得$C$的普通方程为$xy=\lambda$，

将$x=\rho\cos\theta$、$y=\rho\sin\theta$，代入$xy=\lambda$

得$\rho^2\sin\theta\cos\theta=\lambda$，即$\rho^2\sin 2\theta=2\lambda$，即为$C$的极坐标方程……………………3 分

由直线l的方程$\rho\sin(\theta-\dfrac{\pi}{6})=2$化简得$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\rho\sin\theta-\dfrac{1}{2}\rho\cos\theta=2$，

化简得$x-\sqrt{3}y+4=0$，即为l的直角坐标方程．……………………5 分

（2）将直线$\theta=\dfrac{\pi}{12}$代入$\rho^2\sin 2\theta=2\lambda$，

得$\rho^2=4\lambda$，即$\rho_1=2\sqrt{\lambda}$、$\rho_2=-2\sqrt{\lambda}$．……………………7 分

故以AB为直径的圆圆心为O，半径$r=2\sqrt{\lambda}$．

圆心O到直线l的距离$d=\dfrac{4}{\sqrt{1+3}}=2$，由已知得$2\sqrt{\lambda}=2$，解得$\lambda=1$．………10 分

23．解：

（1）因为$a>0,b>0$，$f(x)=|x+a|+|x-b|\geqslant|(x+a)-(x-b)|=a+b$，……………………2 分

由题意，有$a+b=2$，

于是$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{ab}=\dfrac{b+a+1}{ab}=\dfrac{3}{ab}\geqslant\dfrac{3}{(\frac{a+b}{2})^2}=3$，

当且仅当$a=b=1$时取等号，

即$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{ab}\geqslant 3$．……………………5 分

（2）由柯西不等式得

$\dfrac{\sin^4 t}{a}+\dfrac{\cos^4 t}{b}=\dfrac{1}{2}(a+b)(\dfrac{\sin^4 t}{a}+\dfrac{\cos^4 t}{b})$

$\geqslant\dfrac{1}{2}(\sqrt{a\dfrac{\sin^4 t}{a}}+\sqrt{b\dfrac{\cos^4 t}{b}})^2=\dfrac{1}{2}$……………………9 分

当且仅当$\dfrac{a}{\frac{\sin^4 t}{a}}=\dfrac{b}{\frac{\cos^4 t}{b}}$，即$\dfrac{a}{\sin^2 t}=\dfrac{b}{\cos^2 t}=\dfrac{a+b}{\sin^2 t+\cos^2 t}=2$，

即$\sin^2 t=\dfrac{a}{2},\cos^2 t=\dfrac{b}{2}$时取等号．

故$\dfrac{\sin^4 t}{a}+\dfrac{\cos^4 t}{b}\geqslant\dfrac{1}{2}$．……………………10 分