德阳三中高2020级高三上期第四次综合性考试 数学（文科）

满分: 150分　时间：120分钟

一、单项选择题（本题共12道小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）．

1. 已知集合 $M=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1\}$，$N=\{x\in R|x(x-2)\le 0\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A. $\{-1,\ 0,\ 1\}$　　B. $\{0,\ 1\}$

C. $\{-2,\ -1,\ 0,\ 1\}$　　D. $\{-2,\ -1,\ 0\}$

【答案】B

【解析】

【分析】可以求出集合 N，然后进行交集的运算即可．

【详解】∵$M=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1\}$，$N=\{x|0\le x\le 2\}$，

∴$M\cap N=\{0,\ 1\}$．

故选：B．

2. 已知 $(2+xi)i=1+yi(x、y\in R$，i 为虚数单位)，则 $x+yi$ 在复平面内对应的点在（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

【答案】B

【解析】

【分析】根据复数的乘法运算及复数相等求出 x, y 即可得解.

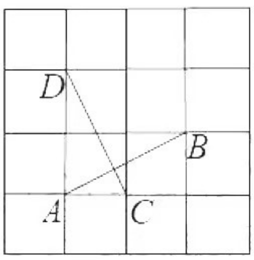
【详解】由 $(2+xi)i=1+yi$ 可得 $-x+2i=1+yi$，

所以 $x=-1, y=2$，

则 $x+yi=-1+2i$，故复平面内对应的点在第二象限，

故选：B

3. 如图所示的图形中，每一个小正方形的边长均为1，则 $(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{CD}=$（　　）



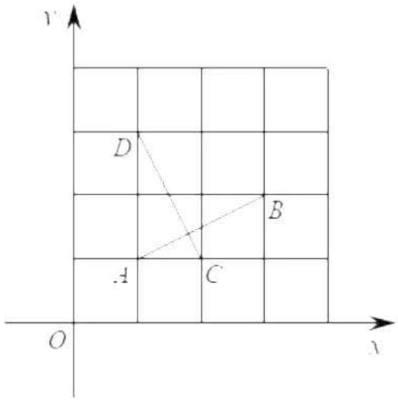
A. 0　　B. 1　　C. -2　　D. -1

【答案】D

【解析】

【分析】由题可得$\overrightarrow{AC}=(1,0),\overrightarrow{AB}=(2,1),\overrightarrow{CD}=(-1,2)$，即求.

【详解】由题把图形看作平面直角坐标系的一部分则$\overrightarrow{AC}=(1,0),\overrightarrow{AB}=(2,1),\overrightarrow{CD}=(-1,2)$，



$\therefore(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{CD}=(3,1)\cdot(-1,2)=-3+2=-1$.

故选：D.

4. 已知数列 $\{a_n\}$的前n 项和S_n 满足$S_n=2a_n-1$，则$a_{10}=$ （　　）

A. 511　　B. 512　　C. 1023　　D. 1024

【答案】B

【解析】

【分析】根据a_n与S_n的关系可得出数列为等比数列，根据通项公式求解即可.

【详解】由题可知：$S_n=2a_n-1$，

①当 $n=1$ 时，$S_1=2a_1-1$，解得：$a_1=1$

②当 $n\geq 2$ 时，$S_{n+1}=2a_{n+1}-1$，则

$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n\Rightarrow a_{n+1}=2a_{n+1}-2a_n\Rightarrow a_{n+1}=2a_n$ ，

当$n=2$时，$a_1+a_2=2a_2-1$，解得$a_2=2$，

所以$a_2=2a_1$，

即$a_{n+1}=2a_n$对$n\in N^*$成立，

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列，

故 $a_n=2^{n-1}$，当 $n=10$ 时，$a_{10}=2^{10-1}=2^9=512$.

故选：B.

5. 下列直线中能成为曲线 $y=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$ 的对称轴的是（　　）

A. $x=\frac{5\pi}{12}$　　B. $x=\frac{7\pi}{12}$　　C. $x=\frac{\pi}{6}$　　D. $x=\frac{\pi}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】由三角恒等变换化简后，根据正弦型三角函数的对称轴求解即可.

【详解】$\because y=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\left(\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ ，

$\therefore$ 令 $2x-\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$ 解得对称轴方程为 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}$，$k\in Z$.

选项中只有当 $k=0$ 时，$x=\frac{5\pi}{12}$ 符合题意.

故选：A.

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-1, & x\leq 0\\ \log_2(2x+3), & x>0\end{cases}$，则 $f[f(-1)]=$（　　）

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 0

【答案】A

【解析】

【分析】根据分段函数的解析式直接计算即可.

【详解】$\because f(x)=\begin{cases}2^x-1, & x\leq 0\\ \log_2(2x+3), & x>0\end{cases}$,

$\therefore f(-1)=2^{-1}-1=-\frac{1}{2}$,

$\therefore f[f(-1)]=f\left(\frac{1}{2}\right)=\log_2(2\times\frac{1}{2}+3)=2$,

故选：A

7. 由表中三个样本点通过最小二乘法计算得到变量 x、y 之间的线性回归方程为：$\hat{y}=2x+k$，且当 $x=10$ 时，y 的预报值 $\hat{y}=23$，则 $2m-n=$（　　）

x	12	m	13
y	27	25	n

A. 6　　B. -6　　C. 7　　D. -7

【答案】D

【解析】

【分析】由题可得 $k=3$，利用线性回归方程过样本中心可得 $\frac{52+n}{3}=2\times\frac{25+m}{3}+3$，即得.

【详解】由题可得 $23=2\times10+k$，

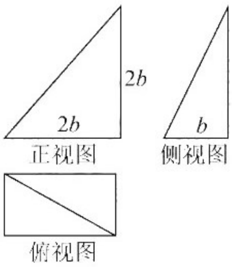
$\therefore k=3$，$\hat{y}=2x+3$，又 $\overline{x}=\frac{25+m}{3}$，$\overline{y}=\frac{52+n}{3}$，

$\therefore \frac{52+n}{3}=2\times\frac{25+m}{3}+3$，

$\therefore 2m-n=-7$.

故选：D.

8. 如图所示三视图表示的几何体的外接球表面积为 36π，则该几何体的体积为（　　）



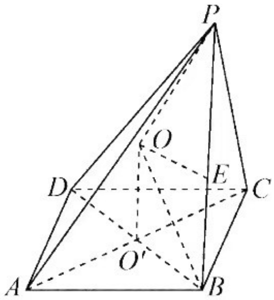
A. $\frac{4}{3}$　　B. 36　　C. $\frac{32}{3}$　　D. $\frac{9}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据三视图还原出几何体，由外接球的面积得球半径，据此求出 b，即可得出棱锥体积.

【详解】由三视图可知，几何体为一条侧棱 PB 垂直底面矩形的四棱锥 $P-ABCD$，如图，



其中$PB=AB=2b$，$BC=b$，

由外接球的表面积$S=4\pi R^2=36\pi$，可得外接球半径$R=3$，

设外接球球心为O，底面矩形的外接圆圆心为O'，

则$OO'\perp$平面$ABCD$，所以$OO'//PB$，

过O作$OE\perp PB$于E，则由$OB=OP=R$知E为PB中点，

由四边形$O'OEB$为矩形知，$O'O=EB=\frac{1}{2}PB=b$，

在$\mathrm{Rt}\triangle OO'B$中，$OB^2=O'B^2+OO'^2$，即$R^2=\left(\frac{\sqrt{(2b)^2+b^2}}{2}\right)^2+b^2=9$，

解得$b=2$，

所以$V=\frac{1}{3}\cdot S_{矩形ABCD}\cdot PB=\frac{1}{3}\times 2\times 4\times 4=\frac{32}{3}$.

故选：C

9. 在ΔABC中，$0<A<\frac{\pi}{2}$，且$\tan A+\tan\left(A-\frac{\pi}{4}\right)=2$，则"$\frac{\pi}{4}<B<\frac{\pi}{2}$"是"$\Delta ABC$为锐角三角形"的

（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】由已知先求$\tan A$，可得A，然后可解.

【详解】因为$\tan A+\tan\left(A-\frac{\pi}{4}\right)=\tan A+\frac{\tan A-1}{1+\tan A}=2$，解得$\tan^2 A=3, 0<A<\frac{\pi}{2}, \tan A=\sqrt{3}$，即$A=\frac{\pi}{3}$，

所以$B+C=\frac{2\pi}{3}$，若$\frac{\pi}{4}<B<\frac{\pi}{2}$，则$\frac{\pi}{6}<C<\frac{5\pi}{12}$，此时，$\Delta ABC$为锐角三角形；

若ΔABC为锐角三角形，取$C=\dfrac{7\pi}{15}$，则$B=\dfrac{\pi}{5}$，故"$\dfrac{\pi}{4}<B<\dfrac{\pi}{2}$"是"$\Delta ABC$为锐角三角形"的充分不必要条件.

故选：A

10. 已知正实数a、b满足$a+b=2$，则$\dfrac{2a}{b}+\dfrac{1}{a}$的最小值是（　　）

A. $\dfrac{5}{2}$　　B. 3　　C. 2　　D. $\dfrac{9}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】由题可得$\dfrac{2a}{b}+\dfrac{1}{a}=\dfrac{4}{b}+\dfrac{1}{a}-2$，然后利用"乘1法"即得.

【详解】∵正实数a、b满足$a+b=2$，

$\therefore \dfrac{2a}{b}+\dfrac{1}{a}=\dfrac{2(2-b)}{b}+\dfrac{1}{a}=\dfrac{4}{b}+\dfrac{1}{a}-2$，

又$\dfrac{4}{b}+\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{b}+\dfrac{1}{a}\right)(a+b)=\dfrac{1}{2}\left(4+1+\dfrac{4a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)\ge\dfrac{1}{2}\left(5+2\sqrt{\dfrac{4a}{b}\cdot\dfrac{b}{a}}\right)=\dfrac{9}{2}$，

当且仅当$\dfrac{4a}{b}=\dfrac{b}{a}$，即$a=\dfrac{2}{3},b=\dfrac{4}{3}$等号成立，

$\therefore \dfrac{2a}{b}+\dfrac{1}{a}\ge\dfrac{9}{2}-2=\dfrac{5}{2}$.

故选：A.

11. 已知H为ABC的垂心，$AB=4$，$AC=6$，M为边BC的中点，则$\overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{BC}=$（　　）

A. 20　　B. 10　　C. -20　　D. -10

【答案】B

【解析】

【分析】利用平面向量的线性运算，$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，$\overrightarrow{HM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AH}$，而$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，代入计算即可.

【详解】由题意$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，$\overrightarrow{HM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AH}$，$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，

$\overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AH})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

$=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2)=\dfrac{1}{2}(6^2-4^2)=10$.

故选：B．

【点睛】本题考查平面向量的数量积，解题关键是利用向量加减法法则得到$\overrightarrow{HM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AH}$，由$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，这样$\overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}$，这两个向量都可以用$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$表示，这就与已知条件建立了联系．

12. 已知奇函数$f(x)=\begin{cases}x^2+2x,x\ge 0\\ mx^2+nx,x<0\end{cases}$满足$f(a-b)+f(a-b-mn)\le 0(a,b,m,n\in R)$，则代数式$(a-1)^2+b^2$的取值范围为（　　）

A. $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$　　B. $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　　C. $[4,+\infty)$　　D. $[2,+\infty)$

【答案】D

【解析】

【分析】由奇函数定义求出m,n，确定函数$f(x)$的单调性，化简不等式$f(a-b)+f(a-b-mn)\le 0$得a,b满足的关系，再由代数式$(a-1)^2+b^2$的几何意义求得取值范围．

【详解】∵$f(x)$是奇函数，

∴当$x<0$时，$-x>0$，$f(x)=-f(-x)=-[(-x)^2+2\times(-x)]=-x^2+2x$，

∴$mx^2+nx=-x^2+2x$，∴$m=-1,n=2$，

即$f(x)=\begin{cases}x^2+2x,x\ge 0\\ -x^2+2x,x<0\end{cases}$．$f(x)$在$R$上是增函数．

则不等式$f(a-b)+f(a-b-mn)\le 0$可化为$f(a-b)<f(mn-a+b)$，

∴$a-b<mn-a+b$，$2a-2b<mn=-2$，$a-b+1<0$．

满足条件的点(a,b)在直线$x-y+1=0$的左上方，

而$(a-1)^2+b^2$表示点$P(a,b)$到点$Q(1,0)$间距离的平方，$|PQ|_{min}=\dfrac{|1-0+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

∴$|PQ|^2\ge 2$．

故选：D．

【点睛】本题考查函数的奇偶性与单调性，考查二元一次不等式表示的平面区域，考查两点间的距离与点到直线的距离公式．函数的单调性与奇偶性属于基础应用，代数式是平方和形式时，用其几何意义：两点间距离的平方求解更加方便．

二、填空题（本题共 4 道小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 已知平面向量$\vec{a}$、$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，且$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$，则$\vec{c}$与$\vec{a}$的夹角等于________.

【答案】$\frac{\pi}{3}$##60°

【解析】

【分析】由题可得$\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}$，$|\vec{c}|=\sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^2}=1$，再利用夹角公式即得.

【详解】∵平面向量$\vec{a}$、$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，且$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$，

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}=\vec{a}^2-\vec{b}\cdot\vec{a}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，

$|\vec{c}|=\sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}=\sqrt{1-1+1}=1$，

$\therefore \cos\langle\vec{c},\vec{a}\rangle=\frac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{|\vec{c}||\vec{a}|}=\frac{1}{2}$，

所以$\vec{c}$与$\vec{a}$的夹角等于$\frac{\pi}{3}$.

故答案为：$\frac{\pi}{3}$.

14. 已知递增等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足：$a_1=1$，$\frac{a_4+a_5}{a_2+a_3}=4$，则$\frac{S_1+S_4}{a_4}=$______.

【答案】2

【解析】

【分析】利用已知条件求出公比q，再求出S_1,S_4,a_4后可得结论.

【详解】设等比数列$\{a_n\}$公比为q，则$\frac{a_4+a_5}{a_2+a_3}=\frac{a_4(1+q)}{a_2(1+q)}=q^2=4$，又数列$\{a_n\}$是递增的，$\therefore q=2$，

$\therefore S_4=\frac{1-2^4}{1-2}=15$，$S_1=a_1=1$，$a_4=2^3=8$，$\frac{S_1+S_4}{a_4}=\frac{1+15}{8}=2$.

故答案为：2.

【点睛】本题考查等比数列的通项公式和前n项和公式，属于基础题.

15. 若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$的离心率与椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$的离心率互为倒数，则椭圆的焦点到双曲线的渐近线的距离是________.

【答案】$\sqrt{3}$

【解析】

【分析】根据椭圆方程求出焦点坐标、离心率，得到双曲线的离心率，求出双曲线渐近线，由点到直线距离求解.

【详解】由$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$知椭圆中$a'=4,b'=2\sqrt{3}$，

所以$c'=\sqrt{16-12}=2$，即椭圆的焦点为$(\pm2,0)$，

所以$e'=\frac{c'}{a'}=\frac{1}{2}$，

由题意知双曲线的离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{1}{e'}=2$，

所以$\frac{b^2}{a^2}=3$，故双曲线的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$，

不妨取椭圆左焦点$(-2,0)$，则由点到直线距离可得$d=\frac{|(\pm\sqrt{3})\times(-2)-0|}{\sqrt{1+3}}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，

同理，椭圆右焦点到渐近线的距离也是$\sqrt{3}$，

所以椭圆焦点到渐近线的距离为$\sqrt{3}$，

故答案为：$\sqrt{3}$

16. 已知函数$f(x)=\begin{cases} m\ln x, x>m \\ (2-\frac{m}{\mathrm{e}})x, x\le m \end{cases}(\mathrm{e}=2.71828\cdots)$，若对定义域内不相等的$x_1,x_2$，都有$x_1f(x_1)+x_2f(x_2)>x_1f(x_2)+x_2f(x_1)$，则实数$m$的取值范围是_________.

【答案】$[\mathrm{e},2\mathrm{e})$

【解析】

【分析】由条件知函数单调递增，根据分段函数为增函数建立不等式组求解，求解过程需构造函数利用单调性求解.

【详解】由 $x_1f(x_1)+x_2f(x_2)>x_1f(x_2)+x_2f(x_1)$，

可得$(x_1-x_2)(f(x_1)-f(x_2))>0$，即函数在定义域内单调递增，

$\therefore \begin{cases} m>0 \\ 2-\frac{m}{e}>0 \\ m\ln m \geq m\left(2-\frac{m}{e}\right) \end{cases}$，即 $\begin{cases} 0<m<2e \\ \ln m+\frac{m}{e}-2\geq 0 \end{cases}$，

又 $g(m)=\ln m+\frac{m}{e}-2$ 单调递增，且 $g(e)=\ln e+\frac{e}{e}-2=0$，

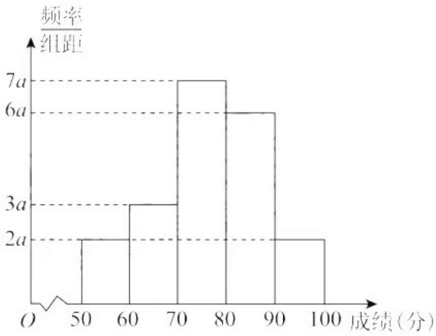
$\therefore$ 由 $g(m)=\ln m+\frac{m}{e}-2\geq 0=g(e)$，得 $m\geq e$，

$\therefore$ 实数 m 的取值范围是 $[e,2e)$.

故答案为：[e，2e).

三、解答题（本题共 6 道小题，共 70 分，写出必要的文字说明与演算步骤）

17. 垃圾分类是改善环境，节约资源的新举措. 住建部于 6 月 28 日拟定了包括我市在内的 46 个重点试点城市，要求这些城市在 2020 年底基本建成垃圾分类处理系统，为此，我市某中学对学生开展了"垃圾分类"有关知识的讲座并进行测试，将所得测试成绩整理后，绘制出频率分布直方图如图所示.



（1）求频率分布直方图中 a 的值，并估计测试的平均成绩;

（2）学校要求对不及格（60 分以下)的同学进行补考，现按分层抽样的方法在 $[50,70)$ 的同学抽取 5 名，再从这 5 名同学中抽取 2 人，求这 2 人中至少有一人需要补考的概率.

【答案】（1）$a=0.005$，76.5；

（2）$\frac{7}{10}$.

【解析】

【分析】（1）根据频率分布直方图可求出 a 及平均值；

（2）由分层抽样抽出样本编号，列出所有基本事件，根据古典概型求解.

【小问 1 详解】

由题意得:$(2a+3a+7a+6a+2a)\times 10=1$,

解得$a=0.005$,

平均成绩为: $55\times 0.1+65\times 0.15+75\times 0.35+85\times 0.3+95\times 0.1=76.5$.

【小问2详解】

由题意知抽取的5人中,$(50,60)$(不及格)有两人,记为a,b;$(60,70)$有3人,记为A,B,C.

随机试验的所有可能结果有:$ab,aA,aB,aC,bA,bB,bC,AB,AC,BC$共10个,

其中至少有1人需要补考的结果有:ab,aA,aB,aC,bA,bB,bC共7个.

所以所求概率为$P=\dfrac{7}{10}$.

18. 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2+n+b(n\in N^*)$.

(1)求实数b的值及$\{a_n\}$的通项公式;

(2)若$a_n=\log_{\sqrt{2}} b_n$,且$c_n=\dfrac{b_n}{(b_n-1)(b_{n+1}-1)}$,求数列$\{c_n\}$的前$n$项和$T_n$.

【答案】(1)0,$a_n=2n$;(2)$T_n=1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$.

【解析】

【分析】(1)由$a_1=S_1$求出a_1,由$n\geq 2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}$求出a_n,利用a_1,a_2,a_3必成等差数列可求得b,从而得a_n.

(2)由(1)可求得b_n,对$c_n=\dfrac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}$裂项为$\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$,再相加.

【详解】(1)由于$S_n=n^2+n+b(n\in N^*)$

所以当$n=1$时,$a_1=S_1=2+b$

当$n\geq 2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2n$

又数列$\{a_n\}$是等差数列,故$2a_2=a_1+a_3$,即$8=6+2+b$

所以$b=0$.

易验证此时数列$\{a_n\}$是以2为首项,2为公差的等差数列,$a_n=2n$.

(2)由题意及(1)知:$b_n=\left(\sqrt{2}\right)^{2n}=2^n$

所以$c_n=\dfrac{b_n}{(b_n-1)(b_{n+1}-1)}=\dfrac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$

从而$T_n=\dfrac{1}{2-1}-\dfrac{1}{2^2-1}+\dfrac{1}{2^2-1}-\dfrac{1}{2^3-1}+\cdots+\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}=1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$．.

【点睛】考查等差数列的通项公式，考查已知S_n与a_n的关系求数列通项公式，考查裂项相消法求数列的和．已知S_n与a_n的关系求数列通项公式时，要注意只有$n\geq 2$时才有$a_n=S_n-S_{n-1}$，不包含a_1，$a_1=S_1$，它们的计算方法不一样，注意验证．

19. 设 ABC的内角A、B、C所对的边分别为a、b、c，且$2a\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+C\right)+c=2b$.

（1）求内角A的大小.

（2）已知点D在线段BC上，且AD平分内角A，若$AD=2$， ABC的面积为$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，求 ABC的周长.

【答案】（1） $A=\dfrac{\pi}{3}$

（2） $3+3\sqrt{3}$

【解析】

【分析】（1）利用正弦定理化边为角，结合三角形的内角关系及两角和的正弦公式求得$\cos A$，即可得出答案；

（2）由AD平分内角A，可得$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，再根据 ABC的面积结合余弦定理可求得a及$b+c$，即可得解.

【小问1详解】

解：因为$2a\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+C\right)+c=2b$，

所以$2\sin A\cos C+\sin C=2\sin B=2\sin(A+C)$，

所以$\sin C=2\sin C\cos A$，

由于$\sin C\neq 0$，所以$\cos A=\dfrac{1}{2}$，

又$0<A<\pi$，

所以$A=\dfrac{\pi}{3}$；

【小问2详解】

解：由题意及（1）得：$S_{\ ABC}=\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

所以 $bc=6$，

在 ABC 中应用余弦定理得：$a^2=b^2+c^2-2bc\times\frac{1}{2}$，

即 $a^2=(b+c)^2-18$，

又 $S_{\ ABC}=S_{\ ABD}+S_{\ ACD}$，

即 $\frac{1}{2}bc\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}c\times2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}b\times2\times\frac{1}{2}$，

亦即 $b+c=\frac{\sqrt{3}}{2}bc=3\sqrt{3}$，

所以 $a^2=9$，即 $a=3$，

从而 ABC 的周长为 $3+3\sqrt{3}$.

20. 已知曲线 $f(x)=x^3-3x+\lambda$ 在点 $A(m,f(m))$ 处的切线与曲线的另外一个交点为 B，P 为线段 AB 的中点，O 为坐标原点.

（1）求 $f(x)$ 的极小值并讨论 $f(x)$ 的奇偶性.

（2）当函数 $f(x)$ 为奇函数时，直线 OP 的斜率记为 k，若 $-3 \bullet k \bullet 4$，求实数 m 的取值范围.

【答案】（1）$\lambda-2$，答案见解析；

（2）$[-1,0)\cup(0,1]$.

【解析】

【分析】（1）利用导函数可得当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极小值 $\lambda-2$；利用奇偶性的定义分 $\lambda=0$，$\lambda\neq0$ 讨论即得；

（2）由题可得 $B\left(-2m,-8m^3+6m\right)(m\neq0)$，进而可得 $P\left(-\frac{m}{2},\frac{-7m^3+3m}{2}\right)$，再结合条件即求.

【小问 1 详解】

由题可得 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$，

当 $-1<x<1$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，

所以当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极小值 $\lambda-2$，

当$\lambda=0$时，$f(x)=x^3-3x$，定义域为R，

又$f(-x)=-x^3+3x=-f(x)$，

所以$f(x)$为奇函数.

当$\lambda\neq 0$时，$f(-1)=2+\lambda$，$f(1)=-2+\lambda$，

显然$f(-1)\neq f(1)$且$f(-1)+f(1)=2\lambda\neq 0$，

所以$f(x)$为非奇非偶函数.

【小问2详解】

由（1）知$f(x)=x^3-3x$，$f'(x)=3x^2-3$，

所以曲线在点$A(m,f(m))$处的切线方程为$y-\left(m^3-3m\right)=\left(3m^2-3\right)(x-m)$，

其与原曲线方程$y=x^3-3x$，

联立化简得：$(x-m)^2(x+2m)=0$，

从而$B\left(-2m,-8m^3+6m\right)(m\neq 0)$，

所以$P\left(-\dfrac{m}{2},\dfrac{-7m^3+3m}{2}\right)$，$k=\dfrac{7m^3-3m}{m}$，

由$-3\le k\le 4$得：$0\le 7m^2\le 7$，又$m\neq 0$，

从而实数m的取值范围为$[-1,0)\cup(0,1]$.

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{a\ln x}{x}$（a 为常数)的极大值为$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

（1）求实数 a的值

（2）若 $\forall x_2\in(-\infty,0)$总$\exists x_1\in\mathrm{R}$使得$\mathrm{e}^{x_2}f(x_1)=x_2$成立，求$x_1x_2$的最小值.

【答案】（1）1；　　（2）$-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

【解析】

【分析】（1）求出函数的导数，对a分类讨论，求出函数的极大值即可得解；

（2）$\mathrm{e}^{x_2}f(x_1)=x_2$可转化为$f(x_1)=\dfrac{x_2}{\mathrm{e}^{x_2}}=f(\mathrm{e}^{x_2})$，再由函数在$(0,1)$单调可转化为$x_1=\mathrm{e}^{x_2}$，得到$x_1x_2=x_2\mathrm{e}^{x_2}$，$x_2\in(-\infty,0)$，构造函数 求解即可.

【小问1详解】

$f'(x)=\dfrac{a(1-\ln x)}{x^2}$，显然 $a=0$ 不合题意，

若 $a>0$，当 $0<x<e$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>e$ 时，$f'(x)<0$，

即 $f(x)$ 在 $(0，e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减.

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(e)=\dfrac{a}{e}$，由题意得，$\dfrac{a}{e}=\dfrac{1}{e}$，所以 $a=1$.

若 $a<0$，当 $0<x<e$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>e$ 时，$f'(x)>0$，

即 $f(x)$ 在 $(0，e)$ 上单调递减，在 $(e,+\infty)$ 上单调递增，不合题意.

综上，$a=1$.

【小问 2 详解】

由（1）知 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，所以 $e^{x_2}f(x_1)=x_2 \Leftrightarrow f(x_1)=\dfrac{x_2}{e^{x_2}}=f(e^{x_2})$.

又 $x_2\in(-\infty,0)$，所以 $f(x_1)<0$，$e^{x_2}\in(0,1)$，从而 $\ln x_1<0 \Leftrightarrow 0<x_1<1$.

由（1）知函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，所以 $f(x_1)=f(e^{x_2}) \Leftrightarrow x_1=e^{x_2}$.

则 $x_1x_2=x_2e^{x_2}$，$x_2\in(-\infty,0)$，

令 $h(x)=xe^x(x<0)$，则 $h'(x)=(1+x)e^x$，显然当 $x<-1$ 时，$h'(x)<0$；

当 $-1<x<0$ 时，$h'(x)>0$，即 $h(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减；在 $(-1,0)$ 上单调递增，

从而 $h(x)_{\min}=h(-1)=-\dfrac{1}{e}$，即当 $x_2=-1$ 时，x_1x_2 的最小值为 $-\dfrac{1}{e}$.

【点睛】关键点点睛：由 $e^{x_2}f(x_1)=x_2$ 转化为 $f(x_1)=f(e^{x_2})$，再转化为 $x_1x_2=x_2e^{x_2}$，$x_2\in(-\infty,0)$ 是解题的关键，完成转化后，构造函数 $h(x)=xe^x(x<0)$，利用导数求最小值即可求解.

22. 已知曲线 $C_1:\begin{cases}x=1+\sqrt{2}\cos\varphi\\ y=1+\sqrt{2}\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数，且 $0\le\varphi<2\pi$），直线 $C_2:x=4$，以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

（1）求曲线 C_1 与直线 C_2 的极坐标方程；

（2）射线 $C_3:\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 与曲线 C_1 的一个交点为 A（A 不是原点），与直线 C_2 的交点为 B，求 $\dfrac{|OB|}{|OA|}$ 的值.

【答案】（1）C_1 的极坐标方程为：$\rho=2(\sin\theta+\cos\theta)$，$C_2$ 的极坐标方程为：$\rho=\dfrac{4}{\cos\theta}$；

（2）2.

【解析】

【分析】（1）消参得曲线C_1的普通方程，再由$x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$转化为极坐标方程；

（2）根据极坐标方程求出A, B点的极径即可得解.

【小问1详解】

消去参数得曲线C_1的普通方程为：$x^2+y^2-2x-2y=0$，

由$x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$可得$C_1$的极坐标方程为：$\rho=2(\sin\theta+\cos\theta)$，

C_2的极坐标方程为：$\rho=\dfrac{4}{\cos\theta}$.

【小问2详解】

根据极坐标方程及极径的意义可知：

$|OA|=2\left(\sin\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$，$|OB|=\dfrac{4}{\cos\dfrac{\pi}{4}}=4\sqrt{2}$，

所以$\dfrac{|OB|}{|OA|}=2$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。