# 中学生标准学术能力诊断性测试 2021 年 11 月测试

## 文科数学试卷

扫码查成绩

**本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。**

**一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1．设 $z=\dfrac{3+2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$，则 $\left|\bar{z}\right|=$

A．$\dfrac{\sqrt{62}}{5}$　　B．$\dfrac{\sqrt{63}}{5}$　　C．$\dfrac{\sqrt{65}}{5}$　　D．$\dfrac{\sqrt{61}}{5}$

2．已知集合 $S=\left\{s\left|s=\dfrac{2}{5}n+\dfrac{1}{3},n\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，$T=\left\{t\left|t=\dfrac{2n}{15}+\dfrac{1}{5},n\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，则 $S\cap T=$

A．$\varnothing$　　B．$S$　　C．$T$　　D．$\mathbf{Z}$

3．已知命题 $p$：$\exists x\in\mathbf{R}$，$\sin x+\cos x=\dfrac{3}{2}$；命题 $q$：$\forall x\in\mathbf{R}$，$\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\geq 2$，则下列命题中是真命题的是

A．$p\wedge\neg q$　　B．$\neg(p\vee q)$　　C．$\neg(p\wedge q)$　　D．$p\vee\neg q$

4．设函数 $f(x)=\dfrac{4x+1}{2x-4}$，则下列函数的对称中心为 $(1,0)$ 的是

A．$f(x-1)+2$　　B．$f(x+1)+2$　　C．$f(x+1)-2$　　D．$f(x-1)-2$

5．已知 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，则 $\sin 3\alpha=$

A．$\dfrac{20}{27}$　　B．$\dfrac{22}{27}$　　C．$\dfrac{23}{27}$　　D．$\dfrac{25}{27}$

6．已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$2a_7+3a_2=10$，则 $S_7=$

A．14　　B．15　　C．16　　D．17

7．在三角形 $ABC$ 中，$D$ 是 $BC$ 边上的一点，且满足 $\angle BAD=30^{\circ}$，$\angle CAD=60^{\circ}$，$AB=4$，$AC=2\sqrt{3}$，则 $BD=$

A．$\dfrac{\sqrt{7}}{5}$　　B．$\dfrac{3\sqrt{7}}{5}$　　C．$\dfrac{2\sqrt{7}}{5}$　　D．$\dfrac{4\sqrt{7}}{5}$

8．已知圆 $C$：$x^2+y^2-8x-4y+19=0$，直线 $l$：$3x-2y-6=0$，直线 $l$ 交圆 $C$ 于 $A$，$B$ 两点，设点 $P(2,0)$，则 $|PA|\cdot|PB|=$

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. 5　　D. 7

9. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 $Q$，$P$ 分别为正方形 $CDD_1C_1$ 和正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心，$M$ 为棱 $AB$ 的中点，则异面直线 $PQ$ 与 $MB_1$ 所成角的余弦值为

A. $\frac{\sqrt{10}}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{5}$

10. 下列函数中在区间 $(1,+\infty)$ 上是增函数的是

A. $y=\frac{2x-1}{x-1}$　　B. $y=\ln\left(x^2-2x-3\right)$

C. $y=\left|x-\frac{1}{2}\right|+2|x-1|$　　D. $y=3^{-x^2+2x-3}$

11. 已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 $F$，过点 $(2,0)$ 的直线交抛物线于 $A$，$B$ 两点，则 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}$ 的取值范围是

A. $\left(\frac{1}{3},2\right)$　　B. $\left[\frac{2}{3},1\right)$　　C. $\left(\frac{2}{3},1\right)$　　D. $\left[\frac{1}{3},2\right)$

12. 已知 $\omega>0$，函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$ 满足 $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-f(x)$，且在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 上恰好存在两个极值点，则 $\omega$ 的最大值为

A. $\frac{44}{3}$　　B. $\frac{56}{3}$　　C. $\frac{46}{3}$　　D. $\frac{20}{3}$

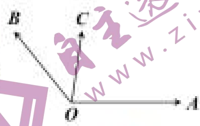
**二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.**

13. 将3名北京冬奥会志愿者全部分配到花样滑冰、短道速滑2个项目进行培训，每名志愿者只分配到一个项目，每个项目至少分配一名志愿者，则甲、乙两名志愿者分配在一起的概率为________.

14. 已知变量满足 $\begin{cases} y\le 2, \\ x+y\ge 1, \\ x-y\le 1, \end{cases}$ 则 $z=\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的最小值为________.

15. 已知函数 $f(x)=e^x-\frac{1}{3}ax^3\ (a\in\mathbf{R})$，若函数 $f(x)$ 存在唯一的极小值点，则实数 $a$ 的取值范围是________.

16. 如图所示，在同一个平面内，向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 满足：$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$，$\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 $\alpha$，且 $\tan\alpha=7$，$\overrightarrow{OC}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 $45°$，若 $\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}\ (m,n\in\mathbf{R})$，则 $\frac{m}{n}=$________.



（第16题图）

**三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17–21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．**

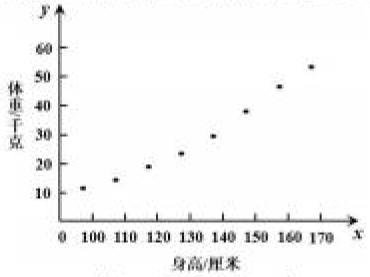
**（一）必考题：共 60 分．**

17. （12 分）设$\{a_n\}$是公比为实数的等比数列，$a_1=1$，$4a_3^2-a_4\cdot a_5+a_4^2=0$．

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）记$S_n$为$\{a_n\}$的前$n$项和，若$4a_m^2-S_m=57$，求$m$的值．

18. （12 分）为了更好的指导青少年健康饮食，某机构调查了本地区不同身高的未成年男性，得到他们的体重的平均值，并对数据做了初步处理，得到下面的散点图及一些统计量的值．




| | |
|---|---|
| $\overline{x}$ | 135 |
| $\overline{y}$ | 35.7 |
| $\overline{\omega}$ | 3.4 |
| $\overline{u}$ | 18750 |
| $\sum_{i=1}^{8}(x_i-\overline{x})^2$ | 4000 |
| $\sum_{i=1}^{8}(\omega_i-\overline{\omega})^2$ | 1.6 |
| $\sum_{i=1}^{8}(u_i-\overline{u})^2$ | $3\times10^8$ |
| $\sum_{i=1}^{8}(y_i-\overline{y})^2$ | 1296 |
| $\sum_{i=1}^{8}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$ | 2375 |
| $\sum_{i=1}^{8}(x_i-\overline{x})(\omega_i-\overline{\omega})$ | 76 |
| $\sum_{i=1}^{8}(u_i-\overline{u})(y_i-\overline{y})$ | $6\times10^5$ |

（其中$\omega_i=\ln y_i$，$u_i=x_i^2$）

（1）根据散点图判断回归方程①$y=a\cdot b^x$；②$y=a+bx^2$都可以作为这个地区未成年男性体重$y$千克与身高$x$厘米的回归方程，请结合相关系数判断哪一个回归方程更合适，并说明理由；

（2）根据（1）的判断结果及表中的数据写出体重$y$千克与身高$x$厘米的回归方程；

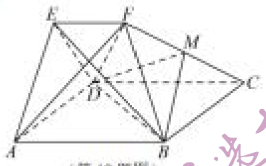
（3）若体重超过相同身高男性体重平均值的1.2倍为偏胖，低于0.8倍为偏瘦，现该地区有一名身高170厘米的未成年男性，根据（2）的结果请你给出一个合理建议，指出他的体重应该控制在多少千克的范围内？

参考数据：$\sqrt{3}\approx1.732$．

参考公式：样本$(x_i,y_i)(i=1,2,3,\cdots,n)$的相关系数$r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$，其回

归直线方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 的斜率和截距的估计值分别为 $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

19. （12 分）在如图所示的五面体中，四边形 $ABCD$ 是正方形，平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCD$，$AB=ED=2EF=2$，$\angle EAD=60^\circ$，$M$ 为棱 $FC$ 的中点.



（第 19 题图）

（1）证明：$AF\parallel$ 平面 $MBD$；

（2）求三棱锥 $E-FDB$ 的体积.

20. （12 分）设抛物线 $C$：$x^2=2py\ (p>0)$，其焦点为 $F$，准线为 $l$，点 $P$ 为 $C$ 上的一点，过点 $P$ 作直线 $l$ 的垂线，垂足为 $M$，且 $|MF|=|FP|$，$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FP}=2$.

（1）求抛物线 $C$ 的方程；

（2）设点 $Q$ 为 $C$ 外的一点且 $Q$ 点不在坐标轴上，过点 $Q$ 作抛物线 $C$ 的两条切线，切点分别为 $A$，$B$，过点 $Q$ 作 Y 轴的垂线，垂足为 $S$，连接 $AS$，$BS$，证明：直线 $AS$ 与直线 $BS$ 关于 Y 轴对称.

21. （12 分）已知函数 $f(x)=\sin x\cdot\tan x$.

（1）设 $g(x)=f(x)+3\cos x$ 且 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，求函数 $g(x)$ 的最小值；

（2）当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，证明：$f(x)\geq x^2$.

**（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．作答时请写清题号．**

22. （10 分）[选修 4—4：坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系 $xOy$ 中，直线 $l$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=t+1\\y=2t+2\end{cases}$（$t$ 为参数），以极点为平面直角坐标系的原点，极轴为 $x$ 轴的正半轴，建立平面直角坐标系，已知曲线 $C$ 的极坐标方程为 $\rho\cos^2\theta+8\cos\theta-\rho=0$.

（1）求直线 $l$ 的极坐标方程；　　（2）若直线 $l$ 与曲线 $C$ 交于 $A$，$B$ 两点，求 $|AB|$ 的值.

23. （10 分）[选修 4—5：不等式选讲]

已知函数 $f(x)=|3x-a|-|x-a|\ (a>0)$.

（1）当 $a=1$ 时，解不等式 $f(x)\leq 0$；

（2）若 $f(x)+|a-1|\geq 0$ 对于任意实数 $x$ 都成立，求 $a$ 的取值范围.