机密★启用前(全国卷理科数学)

华大新高考联盟2021届高三11月教学质量测评

理科数学

命题:华中师范大学考试研究院

本试题卷共4页,23题(含选考题)。全卷满分150分。考试用时120分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

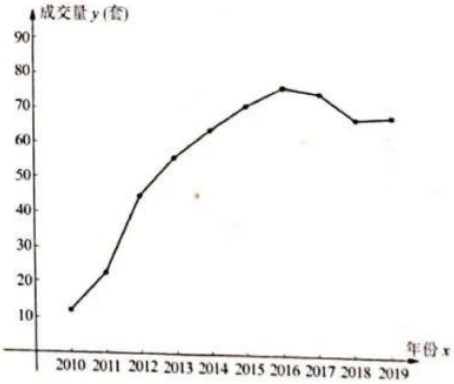
1. 若 $z=2-i$,则 $|z^2-6|=$

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

2. 设集合 $A=\{x|x>m\}$,$B=\{x|(x+3)(x-4)<0\}$,若 $(\complement_R A)\cap B=\{x|-3<x\leqslant 1\}$,则 $m=$

A. -3　　B. 1　　C. 4　　D. -1

3. 自2010年以来,一、二、三线的房价均呈现不同程度的上升趋势,以房养老、以房为聘的理念深入人心,使得各地房产中介公司的交易数额日益增加.现将A房产中介公司2010—2019年4月份的售房情况统计如图所示,根据2010—2013年、2014—2016年、2017—2019年的数据分别建立回归直线方程 $\hat{y}=\hat{b}_1x+\hat{a}_1$、$\hat{y}=\hat{b}_2x+\hat{a}_2$、$\hat{y}=\hat{b}_3x+\hat{a}_3$,则



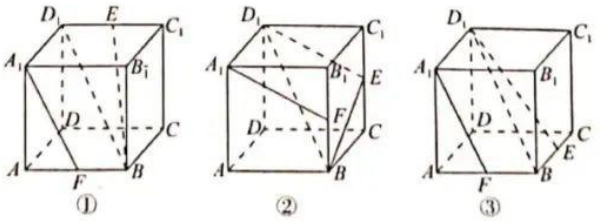
A. $\hat{b}_1>\hat{b}_2>\hat{b}_3$,$\hat{a}_3>\hat{a}_2>\hat{a}_1$

B. $\hat{b}_2>\hat{b}_1>\hat{b}_3$,$\hat{a}_3>\hat{a}_2>\hat{a}_1$

C. $\hat{b}_1>\hat{b}_2>\hat{b}_3$,$\hat{a}_3>\hat{a}_1>\hat{a}_2$

D. $\hat{b}_2>\hat{b}_1>\hat{b}_3$,$\hat{a}_3>\hat{a}_1>\hat{a}_2$

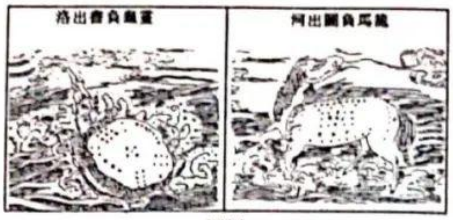
4. 已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,E,F 分别是它们所在线段的中点,则满足 A_1F∥平面 BD_1E 的图形个数为



A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

5. 龙马负图、神龟载书图像如图甲所示,数千年来被认为是中华传统文化的源头;其中洛书有云,神龟出于洛水,甲壳上的图像如图乙所示,其结构是戴九履一,左三右七,二四为肩,六八为足,以五居中,五方白圈皆

阳数，四角黑点为阴数；若从阳数和阴数中分别随机抽出 2 个和 1 个，则被抽到的 3 个数的数字之和超过 16 的概率为



图甲

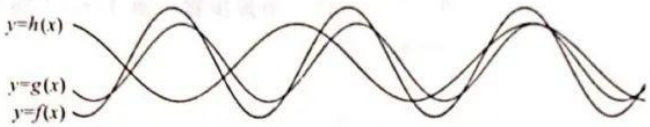

图乙

A. $\frac{13}{40}$　　B. $\frac{7}{20}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{3}{10}$

6. 函数 $f(x)=x^2\cos x$ 的图像在点 $(\pi, f(\pi))$ 处的切线方程为

A. $y=-2\pi x+\pi^2$　　B. $y=2\pi x-3\pi^2$　　C. $y=-\pi x$　　D. $y=\pi x-2\pi^2$

7. 已知 $y=\sin 2x+\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$，$y=\cos\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$，$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)$ 的部分图像如下所示，则



A. $f(x)=\sin 2x+\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$，$g(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)$，$h(x)=\cos\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$

B. $f(x)=\sin 2x+\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$，$g(x)=\cos\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$，$h(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)$

C. $f(x)=\cos\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$，$g(x)=\sin 2x+\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$，$h(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)$

D. $f(x)=\cos\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$，$g(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)$，$h(x)=\sin 2x+\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$

8. $\left(\frac{2}{\sqrt{x^3}}-\frac{3}{x^3}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^6$ 展开式中的常数项为

A. -66　　B. 15　　C. -15　　D. 66

9. 已知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha=\tan\frac{17\pi}{12}\cdot(\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha)$，则 $\alpha=$

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{12}$　　D. $\frac{5\pi}{12}$

10. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_9=81$，$a_7=13$，若 S_3，$S_{17}-S_{16}$，S_k 成等比数列，则 $k=$

A. 11　　B. 13　　C. 15　　D. 17

11. 已知椭圆 $M:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，若椭圆 M 与坐标轴分别交于 A，B，C，D 四点，且从 F_1，F_2，A，B，C，D 这六点中，可以找到三点构成一个直角三角形，则椭圆 M 的离心率的可能取值为

①$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　②$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　　③$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　④$\frac{\sqrt{2}}{2}$

A. ①④　　B. ①③　　C. ①②③　　D. ②④

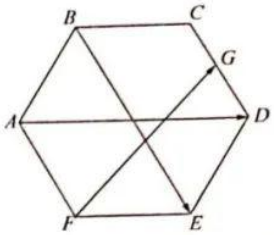
12. 已知定义域为 R 的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且 $xf'(x)=x^3e^x+2f(x)$，若 $f(2)=4e^2+4$，则函数 $g(x)=f(x)-2$ 的零点个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若实数 x,y 满足条件 $\begin{cases}2x+y\geqslant 4,\\ x+3\geqslant y,\\ x\leqslant 4,\end{cases}$ 则 $z=2x-3y$ 的最小值为_____.

14. 如图所示，正六边形 $ABCDEF$ 中，点 G 为线段 CD 的中点，若 $\overrightarrow{FG}=x\overrightarrow{AD}+y\overrightarrow{BE}$，则 $x+y=$_____.



15. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}=1$ 与 x 轴的正、负半轴分别交于 M,N 两点，左、右焦点分别为 F_1,F_2，若以 F_1F_2 为直径的圆与双曲线 C 的一条渐近线交于点 P，则 $\tan 2\angle MPN=$_____.

16. 已知长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 40，外接球表面积为 45π，$AB=5$，$BC<AA_1$，点 M 在线段 A_1D 上运动（含端点位置），记直线 BM 与平面 BCC_1B_1 的所成角为 θ，则 $\tan\theta$ 的取值范围为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

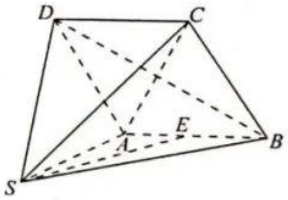
已知△ABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $ac\sin A=2\sin C(a^2+c^2-b^2)$，$b-c=\frac{2\sin A}{\sin B+\sin C}$.

（1）若△ABC 的外接圆面积为 8π，求 $\sin A$ 的值；

（2）若 $A=C$，点 M 在线段 BC 上，且 $AM=2\sqrt{5}$，求∠AMB 的大小.

18.（12 分）

如图所示，四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 中，△SAB 为等边三角形，四边形 $ABCD$ 为菱形，$\frac{AC}{BD}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，二面角 $S\text{-}AB\text{-}C$ 为直二面角，点 E 为线段 AB 的中点.



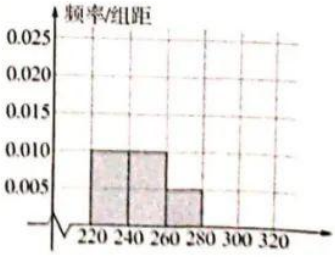
（1）求证：$SC\perp CD$；

（2）求直线 BC 与平面 SCD 所成角的余弦值.

19.（12 分）

山竹，原产于马鲁古，具有清热泻火、生津止渴的功效，其含有丰富的蛋白质与脂类，对体弱、营养不良的人群都有很好的调养作用，因此被誉为夏季的“水果之王”，受到广大市民的喜爱. 现将某水果经销商近一周内山竹的销售情况统计如下表所示：

采购数量 x（单位：箱）	[220,240)	[240,260)	[260,280)	[280,300)	[300,320]
采购人数	100	100	50	200	50



（1）根据表格中数据，完善频率分布直方图；

（2）求近一周内采购量在 286 箱以下（含 286 箱）的人数以及采购数量 x 的平均值；

（3）以频率估计概率，若从所有采购者中随机抽取 4 人，记采购量不低于 260 箱的采购人数为 X，求 X 的分布列以及数学期望 $E(X)$.

20.（12 分）

已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 过点 $A(1,2)$，直线 l 与抛物线 C 交于 M,N 两点.

(1)求抛物线 C 在点 A 处的切线方程；

(2)已知直线 AM,AN 与以 $C'(1,0)$ 为圆心、$\frac{1}{2}$ 为半径的圆 C' 都仅有 1 个交点，判断直线 l 与圆 C' 的位置关系，并说明理由.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=\ln x-mx$.

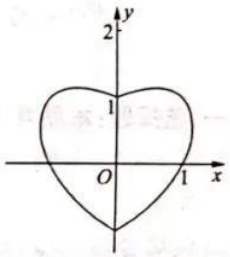
(1)讨论函数 $f(x)$ 在 $(2,5)$ 上的单调性；

(2)记函数 $F(x)=xf(x)$，若 M 为函数 $F(x)$ 的极小值，求证：$m-1<M<-m$.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多选，则按所做的第一题计分。

22.［选修 4—4：坐标系与参数方程］(10 分)

如图所示，已知曲线 C 的极坐标方程为 $\sqrt{1-|\cos\theta|\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{1}{\rho}$，点 $P\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$. 以极点为原点，极轴为 x 轴建立平面直角坐标系 xOy.



(1)求曲线 C 的直角坐标方程；

(2)已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=3-3t\\y=-2+4t\end{cases}$（$t$ 为参数），若直线 l 与曲线 C 交于 M，N 两点，求 $\frac{1}{|PM|}+\frac{1}{|PN|}$ 的值.

23.［选修 4—5：不等式选讲］(10 分)

已知函数 $f(x)=|2x-2|+|x-6|$.

(1)求不等式 $f(x)>12$ 的解集；

(2)记集合 $A=\{x|f(x)-2a=0\}$，若 $A\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

机密★启用前(全国卷理科数学)

华大新高考联盟2021届高三11月教学质量测评

理科数学参考答案和评分标准

一、选择题

1.【答案】C

【命题意图】本题考查复数的概念、复数的运算,考查考生数学运算的核心素养.

【解析】依题意,$z^2=(2-i)^2=3-4i$,则$|z^2-6|=|-3-4i|=5$,故选C.

2.【答案】B

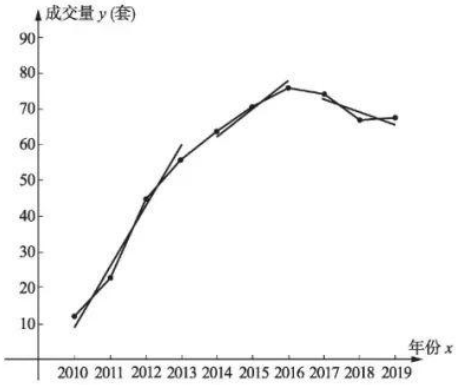
【命题意图】本题考查集合的运算、一元二次不等式的解法,考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$B=\{x|(x+3)(x-4)<0\}=\{x|-3<x<4\}$;而$\complement_{R}A=\{x|x\leqslant m\}$,$(\complement_{R}A)\cap B=\{x|-3<x\leqslant 1\}$,故$m=1$,故选B.

3.【答案】A

【命题意图】本题考查回归直线方程的图像,考查考生直观想象、数学建模、逻辑推理的核心素养.

【解析】观察可知,$\hat{b}_1>\hat{b}_2>\hat{b}_3$,$\hat{a}_3>\hat{a}_2>\hat{a}_1$,故选A.



4.【答案】B

【命题意图】本题考查空间线面的位置关系,考查考生直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】②中,$A_1F\parallel D_1E$,而$A_1F\not\subset$平面BD_1E,故$D_1E\subset$平面BD_1E,故$A_1F\parallel$平面BD_1E;①③中,A_1F与平面BD_1E相交;故选B.

5.【答案】A

【命题意图】本题考查数学文化、古典概型的概率,考查考生数学建模、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,阳数为1、3、5、7、9,阴数为2、4、6、8,故所有的情况有$C_5^2C_4^1=40$种,其中满足条件的为(7,8,9),(7,6,9),(7,4,9),(7,2,9),(5,8,9),(5,6,9),(5,4,9),(3,8,9),(3,6,9),(1,8,9),(7,8,5),(7,6,5),(7,8,3),共13种,故所求概率$P=\frac{13}{40}$,故选A.

6.【答案】A

【命题意图】本题考查导数的几何意义,考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$f'(x)=2x\cos x-x^2\sin x$,故$f'(\pi)=-2\pi$;而$f(\pi)=-\pi^2$,故所求切线方程为$y+\pi^2=-2\pi(x-\pi)$,即$y=-2\pi x+\pi^2$,故选A.

7.【答案】A

【命题意图】本题考查三角函数的图像与性质,考查考生直观想象、逻辑推理的数学素养.

【解析】依题意,$y=\sin 2x+\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$,故$y=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的最大值为$\sqrt{2}$;而$y=\cos\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$,$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)$的最大值均为1,故$f(x)=\sin 2x+\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$;而$y=\cos\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$,$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)$的周期分别为$\frac{4\pi}{3}$,$\pi$,故$g(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)$,$h(x)=\cos\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$,故选A.

8.【答案】C

【命题意图】本题考查二项式定理,考查考生的数学运算、逻辑推理的数学素养.

【解析】$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^6$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_6^r\cdot(-1)^r\cdot x^{3-\frac{3r}{2}}$，而 $\frac{2}{\sqrt{x^3}}-\frac{3}{x^3}=2x^{-\frac{3}{2}}-3x^{-3}$，故要想产生常数项，则所求常数为 $2\times C_6^1\times(-1)-3\times C_6^0=-15$，故选 C.

9.【答案】B

【命题意图】本题考查三角恒等变换，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】显然 $\alpha\neq\frac{\pi}{3}$，故 $\frac{\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha}{\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{17\pi}{12}=\tan\frac{5\pi}{12}$，则 $\alpha+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{12}$，则 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，故选 B.

10.【答案】A

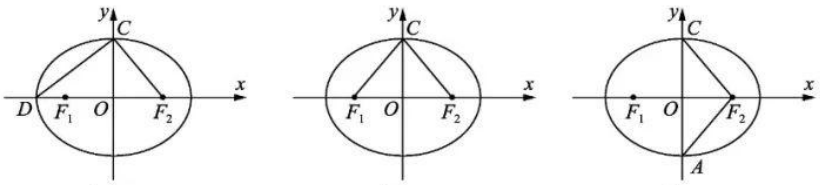
【命题意图】本题考查等差数列的基本公式、等比中项的应用，考查考生的数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$S_9=9a_5=81$，解得 $a_5=9$；而 $a_7=13$，故 $d=\frac{a_7-a_5}{7-5}=2$，则 $a_1=a_5-4d=1$，则 $S_n=n^2$，因为 S_3，$S_{17}-S_{16}$，S_k 成等比数列，故 $S_3S_k=(S_{17}-S_{16})^2=a_{17}^2$，则 $9k^2=33^2$，解得 $k=11$，故选 A.

11.【答案】A

【命题意图】本题考查椭圆的方程、椭圆的性质，考查考生的数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

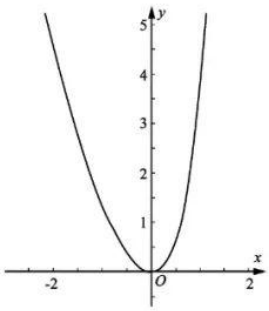
【解析】结合椭圆的对称性，只需要考虑三种情况：1. 如图(1)，若以 D、C、F_2 作为三角形的三个顶点，则 $DC\perp CF_2$，由勾股定理可得，$(a^2+b^2)+a^2=(a+c)^2$，由 $b^2=a^2-c^2$，可得 $c^2+ac-a^2=0$，即 $e^2+e-1=0$，因为 $0<e<1$，解得 $e=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$；2. 如图(2)，若以 C、F_1、F_2 作为三角形的三个顶点，则 $CF_1\perp CF_2$，故 $\angle OCF_2=45°$，则 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$；3. 如图(3)，若以 C、A、F_2 作为三角形的三个顶点，则 $CF_2\perp AF_2$，$\angle CF_2O=45°$，则 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$；综上所述，故选 A.



图(1)　图(2)　图(3)

12.【答案】B

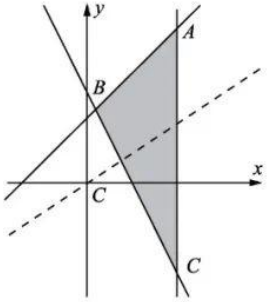
【命题意图】本题考查利用导数研究函数的性质，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.



【解析】依题意，$xf'(x)-2f(x)=x^3e^x$，故 $x^2f'(x)-2xf(x)=x^4e^x$，则 $\frac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4}=e^x$，即 $\left[\frac{f(x)}{x^2}\right]'=e^x$，故 $\frac{f(x)}{x^2}=e^x+c$，令 $x=2$，则 $\frac{f(2)}{4}=e^2+c=e^2+1$，解得 $c=1$，故 $f(x)=x^2(e^x+1)$，故 $f'(x)=x(xe^x+2e^x+2)$；令 $g(x)=xe^x+2e^x+2$，则 $g'(x)=(x+3)e^x$，当 $x<-3$ 时，$g'(x)<0$，当 $x>-3$ 时，$g'(x)>0$，故 $[g(x)]_{\min}=g(-3)=-3e^{-3}+2e^{-3}+2>0$，故当 $x\in(-\infty,0)$，$f'(x)<0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；作出函数 $f(x)$ 的大致图像如图所示；观察可知，$y=f(x)$ 与 $y=2$ 有 2 个交点，即函数 $g(x)$ 有 2 个零点，故选 B.

二、填空题

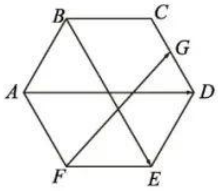
13.【答案】-13.



【命题意图】本题考查线性规划，考查考生直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】作出不等式组所表示的平面区域如图阴影部分所示；观察可知，当直线 $z=2x-3y$ 过点 A 时，z 有最小值，联立 $\begin{cases}x+3=y,\\x=4,\end{cases}$ 解得 $A(4,7)$，故 $z=2x-3y$ 的最小值为 -13.

14.【答案】$\frac{1}{4}$.



【命题意图】本题考查平面向量的基本定理，考查考生直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{4}\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{BE}$，

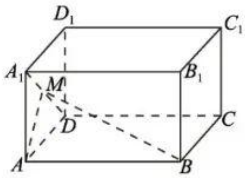
故 $x+y=\frac{1}{4}$.

15.【答案】$-\frac{8}{15}$.

【命题意图】本题考查双曲线的方程、双曲线的性质，考查考生的数学运算、直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】设点 P 在第一象限. 连接 PM,PN，则 $|OP|=\sqrt{10}$，$|OM|=|ON|=2\sqrt{2}$，$\tan\angle MOP=\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$，所以 $|PM|=\sqrt{2}$，$\angle PMN=90°$，故 $P(2\sqrt{2},\sqrt{2})$，$|MN|=4\sqrt{2}$，则在直角△PMN 中，$\tan\angle MPN=\frac{|MN|}{|PM|}=4$，$\tan2\angle MPN=\frac{8}{1-16}=-\frac{8}{15}$.

16.【答案】$\left[\frac{5}{4},\frac{5\sqrt{5}}{4}\right]$.



【命题意图】本题考查空间几何体的位置关系、空间几何体的表面积与体积.

【解析】设 $BC=x$，$AA_1=y$，则 $\begin{cases}xy=8,\\x^2+y^2=20,\end{cases}$ 解得 $BC=2$，$AA_1=4$；作出图形如图所示，连接 AM，则 $\theta=\angle AMB$，则 $\tan\theta=\frac{AB}{AM}=\frac{5}{AM}$；

设 Rt△A_1AD 斜边上的高为 h，则 $A_1D\cdot h=AD\cdot AA_1$，求得 $h=\frac{4}{\sqrt{5}}$，此时 AM 最短，结合 $AA_1=4$，

所以 $\frac{4}{\sqrt{5}}\leqslant AM\leqslant4$，故 $\frac{5}{4}\leqslant\tan\theta\leqslant\frac{5\sqrt{5}}{4}$.

三、解答题

17.【命题意图】本题考查正弦定理、余弦定理、三角恒等变换，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)由 $ac\sin A=2\sin C(a^2+c^2-b^2)$，得 $a^2c=2c(a^2+c^2-b^2)$，则 $a^2=2b^2-2c^2$；……（2 分）

而 $b-c=\frac{2\sin A}{\sin B+\sin C}$，即 $(b-c)(b+c)=2a$，则 $b^2-c^2=2a$；……（3 分）

联立两式，可得 $a^2=4a$；因为 $a>0$，故 $a=4$；……（4 分）

而 $\pi r^2=8\pi$，故 $r=2\sqrt{2}$，……（5 分）

则 $\sin A=\frac{a}{2r}=\frac{4}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$；……（6 分）

(2)因为 $A=C$，故 $\sin A=\sin C$，$a=c=4$，

代入 $ac\sin A=2\sin C(a^2+c^2-b^2)$ 中，得 $\cos B=\frac{1}{4}$， …… (8 分)

则 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{\sqrt{15}}{4}$； …… (9 分)

在△ABM 中，由正弦定理，$\frac{AB}{\sin\angle AMB}=\frac{AM}{\sin\angle ABM}$，

故 $\sin\angle AMB=\frac{AB\cdot\sin\angle ABM}{AM}=\frac{4\times\frac{\sqrt{15}}{4}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$， …… (11 分)

因为 $AM>AB$，故 $\angle AMB<\angle ABM$，故 $\angle AMB=\frac{\pi}{3}$. …… (12 分)

18.【命题意图】本题考查空间线面的位置关系、向量法求空间角，考查考生直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】连接 CE，∵四边形 $ABCD$ 是菱形，∴$AC\perp BD$，

又∵$\frac{AC}{BD}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，∴$\angle ABC=60°$，∴△$ABC$ 是等边三角形.

∵点 E 为线段 AB 的中点，∴$CE\perp AB$. …… (2 分)

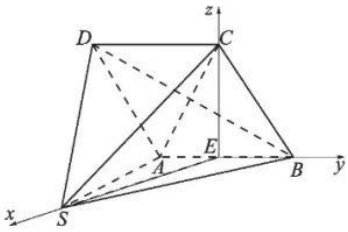
又∵$AB/\!/CD$，∴$CE\perp CD$. ∵在等边△SAB 中，$SE\perp AB$，由 $AB/\!/CD$ 可得，$SE\perp CD$. …… (3 分)

又∵$SE\cap CE=E$，∴$CD\perp$平面 SEC， …… (4 分)

而 $SC\subset$平面 SEC，故 $SC\perp CD$； …… (5 分)

(2)∵$SE\perp AB$，二面角 $S\text{-}AB\text{-}C$ 为直二面角，平面 $SAB\cap$平面 $ABCD=AB$，$SE\subset$平面 SAB，

∴$SE\perp$平面 $ABCD$，∴直线 ES,EB,EC 两两垂直. 以点 E 为坐标原点，分别以 ES,EB,EC 所在直线为坐标轴建立空间直角坐标系如图所示； …… (6 分)



不妨设 $AB=2$，则 $S(\sqrt{3},0,0)$，$C(0,0,\sqrt{3})$，$D(0,-2,\sqrt{3})$，$B(0,1,0)$，

∴$\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{SC}=(-\sqrt{3},0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC}=(0,-1,\sqrt{3})$； …… (7 分)

设平面 SCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

∴$\begin{cases}\overrightarrow{DC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{SC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ ∴$\begin{cases}y=0,\\ -\sqrt{3}x+\sqrt{3}z=0.\end{cases}$ 令 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,0,1)$， … (9 分)

记直线 BC 与平面 SCD 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{BC}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，

…… (11 分)

故所求余弦值 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{\sqrt{10}}{4}$. …… (12 分)

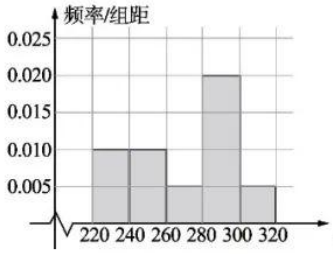
19.【命题意图】本题考查频率分布直方图、样本的数字特征、离散型随机变量的分布列以及数学期望，考查考生直观想象、数学建模、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)依题意，转化频率分布表如下所示：

采购数量 x(单位:箱)	[220,240)	[240,260)	[260,280)	[280,300)	[300,320]
采购人数	100	100	50	200	50
频率	0.2	0.2	0.1	0.4	0.1
频率/组距	0.010	0.010	0.005	0.020	0.005

…… (2 分)

完善频率分布直方图如图所示：



…… (3 分)

(2)采购量在 286 箱以下(含 286)的频率为 $0.2+0.2+0.1+0.4\times\frac{6}{20}=0.62$; …… (5 分)

故采购量在 286 箱以下(含 286)的人数为 $500\times0.62=310$; …… (6 分)

所求平均值为 $230\times0.2+250\times0.2+270\times0.1+290\times0.4+310\times0.1=46+50+27+116+31=270$;

…… (7 分)

(3)依题意,$X\sim B\left(4,\frac{3}{5}\right)$,则 $P(X=0)=\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{16}{625}$,

$P(X=1)=C_4^1\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{96}{625}$,$P(X=2)=C_4^2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{216}{625}$,

$P(X=3)=C_4^3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{216}{625}$,$P(X=4)=\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{81}{625}$,

故 X 的分布列为:

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{16}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{81}{625}$

故 $E(X)=4\times\frac{3}{5}=\frac{12}{5}$. …… (12 分)

20.【命题意图】本题考查抛物线的方程、直线与抛物线综合性问题、直线与圆的位置关系,考查考生直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)将 $A(1,2)$ 代入抛物线 $C:y^2=2px(0>0)$ 中,得 $2p=4$,故抛物线 $C:y^2=4x$; …… (1 分)

而当 $y\geqslant0$ 时,抛物线 $C:y=2\sqrt{x}$,则 $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}$, …… (2 分)

故所求切线斜率 $k=y'|_{x=1}=1$,则抛物线 C 在点 A 处的切线方程为 $y-2=x-1$,即 $x-y+1=0$; ……

…… (4 分)

(2)设过点 A 的直线 AM 或 AN 的方程为 $y-2=k(x-1)$, …… (5 分)

即 $kx-y-k+2=0$,则 $\frac{|2|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{1}{2}$,解得 $k=\pm\sqrt{15}$; …… (7 分)

不妨设直线 AM 的方程为 $y-2=\sqrt{15}(x-1)$,

将直线 AM 与抛物线方程 $y^2=4x$ 联立,消去 x 得 $\sqrt{15}y^2-4y+8-4\sqrt{15}=0$;

设 $M(x_1,y_1)$,则 $y_1+2=\frac{4}{\sqrt{15}}$,$\therefore y_1=\frac{4}{\sqrt{15}}-2$,$x_1=\frac{19}{15}-\frac{4}{\sqrt{15}}$; …… (9 分)

同理设 $N(x_2,y_2)$,$y_2+2=\frac{4}{-\sqrt{15}}$,$\therefore y_2=\frac{4}{-\sqrt{15}}-2$,$x_2=\frac{19}{15}+\frac{4}{\sqrt{15}}$; …… (10 分)

$\therefore$直线 l 的斜率 $k_l=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-1$,

$\therefore$直线 l 的方程为 $y-y_1=-(x-x_1)$,即 $y=-x-\frac{11}{15}$, …… (11 分)

$\therefore l$ 的方程 $15x+15y+11=0$，此时圆心 $C'(1,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{26}{15\sqrt{2}}=\frac{13\sqrt{2}}{15}>\frac{1}{2}$，

$\therefore$ 直线 l 与圆 C' 相离. ……（12 分）

21.【命题意图】本题考查利用导数研究函数的性质，考查考生直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)依题意，$f'(x)=\frac{1}{x}-m=\frac{1-mx}{x}$，……（1 分）

当 $m\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，故函数 $f(x)$ 在 $(2,5)$ 上单调递增；……（2 分）

当 $m>0$ 时，令 $f'(x)=0$，则 $x=\frac{1}{m}$，

当 $\frac{1}{m}\leqslant 2$，即 $m\geqslant\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)<0$，故函数 $f(x)$ 在 $(2,5)$ 上单调递减；……（3 分）

当 $2<\frac{1}{m}<5$，即 $\frac{1}{5}<m<\frac{1}{2}$ 时，当 $x\in\left(2,\frac{1}{m}\right)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in\left(\frac{1}{m},5\right)$ 时，$f'(x)<0$，故函数 $f(x)$ 在 $\left(2,\frac{1}{m}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{m},5\right)$ 上单调递减；……（4 分）

当 $\frac{1}{m}\geqslant 5$，即 $0<m\leqslant\frac{1}{5}$ 时，$f'(x)>0$，故函数 $f(x)$ 在 $(2,5)$ 上单调递增；……（5 分）

综上所述，当 $m\leqslant\frac{1}{5}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(2,5)$ 上单调递增；当 $\frac{1}{5}<m<\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(2,\frac{1}{m}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{m},5\right)$ 上单调递减；当 $m\geqslant\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(2,5)$ 上单调递减；……（6 分）

(2)设 $g(x)=F'(x)=\ln x+1-2mx$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-2m$，$x>0$.

①当 $m<0$ 时，$g'(x)>0$ 恒成立，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

又 $g(1)=1-2m>0$，$g(e^{2m-1})=2m-1+1-2me^{2m-1}=2m(1-e^{2m-1})<0$

所以 $g(x)$ 存在唯一零点 $x_1\in(0,1)$.

当 $x\in(0,x_1)$ 时，$F'(x)=g(x)<0$，当 $x\in(x_1,1)$ 时，$F'(x)=g(x)>0$.

所以 $F(x)$ 存在唯一的极小值点 $x_0=x_1$.

②当 $m=0$ 时，$g(x)=\ln x+1$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，$g\left(\frac{1}{e}\right)=0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有唯一零点 $\frac{1}{e}$.

当 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 时，$F'(x)=g(x)<0$，当 $x\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ 时，$F'(x)=g(x)>0$.

所以 $F(x)$ 存在唯一的极小值点 $x_0=\frac{1}{e}$. ……（7 分）

③当 $m>0$ 时，令 $g'(x)>0$，得 $x\in\left(0,\frac{1}{2m}\right)$；令 $g'(x)<0$，得 $x\in\left(\frac{1}{2m},+\infty\right)$，

所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2m}\right)$ 单调递增，在 $\left(\frac{1}{2m},+\infty\right)$ 单调递减，

所以 $g(x)$ 的最大值为 $g\left(\frac{1}{2m}\right)=-\ln(2m)$，……（8 分）

(i)当 $0<m<\frac{1}{2}$ 时，$g\left(\frac{1}{e}\right)<0$，$g(1)=1-2m>0$，$g\left(\frac{1}{2m}\right)>0$，

$g\left(\frac{1}{m^2}\right)=-2\ln m+1-\frac{2}{m}<-2\left(1-\frac{1}{m}\right)+1-\frac{2}{m}=-1<0$（或用 $g(e^{\frac{1}{m}-1})=\frac{1}{m}-2me^{\frac{1}{m}-1}<0$）

由函数零点存在定理知：$g(x)$ 在区间 $(0,1)$，$(1,+\infty)$ 分别有一个零点 x_2，x_3

当 $x\in(0,x_2)$ 时，$F'(x)=g(x)<0$；当 $x\in(x_2,x_3)$ 时，$F'(x)=g(x)>0$；

所以 $F(x)$ 存在唯一的极小值点 $x_0=x_2$，极大值点 x_3.

(ii)当 $m\geqslant\frac{1}{2}$ 时，$g\left(\frac{1}{2m}\right)\leqslant 0$，$F'(x)=g(x)\leqslant 0$，故 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，无极值点. ……（9 分）

由以上可知，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$F'(x)<0$；

所以 $F(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递减，$(x_0,1)$ 单调递增，所以 $M=F(x_0)<F(1)=-m$. ……（10 分）

由 $F'(x_0)=\ln x_0+1-2mx_0=0$，得 $\ln x_0=2mx_0-1$.

所以 $M=F(x_0)=x_0\ln x_0-mx_0^2=x_0(2mx_0-1)-mx_0^2=mx_0^2-x_0$，

$M-(m-1)=mx_0^2-m-x_0+1=(x_0-1)[m(x_0+1)-1]$，

因为 $x_0\in(0,1)$，$m\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$，所以 $x_0-1<0$，$m(x_0+1)-1<\frac{1}{2}\times 2-1=0$

所以 $M-(m-1)>0$，即 $M>m-1$；所以 $m-1<M<-m$. ……（12 分）

22.【命题意图】本题考查极坐标方程、直角坐标方程的转化、直线参数方程的应用，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】因为 $\rho\sqrt{1-|\cos\theta|\cdot\sin\theta}=1$，故 $\rho^2(1-|\cos\theta|\cdot\sin\theta)=1$，

故 $\rho^2-|\rho\cos\theta|\cdot\rho\sin\theta=1$，即 $x^2+y^2-|x|y=1$；……（4 分）

(2)设直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-\frac{3}{5}t\\ y=2+\frac{4}{5}t\end{cases}$（$t$ 为参数），……（6 分）

若直线 l 与曲线 C 交于 M,N，则只能交于 y 轴右侧部分 $x^2+y^2-xy=1$，将直线的参数方程代入，

可得 $\frac{37}{25}t^2+\frac{22}{5}t+3=0$，(8 分)

设 M,N 对应的参数分别为 t_1,t_2，故 $|PM|\cdot|PN|=|t_1t_2|=\frac{75}{37}$，$|PM|+|PN|=|t_1|+|t_2|=\frac{110}{37}$，

故 $\frac{1}{|PM|}+\frac{1}{|PN|}=\frac{|PM|+|PN|}{|PM|\cdot|PN|}=\frac{22}{15}$. ……（10 分）

23.【命题意图】本题考查绝对值不等式的解法、绝对值三角不等式的性质，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)依题意，$|2x-2|+|x-6|>12$；

当 $x<1$ 时，$2-2x+6-x>12$，则 $x<-\frac{4}{3}$，故 $x<-\frac{4}{3}$；……（2 分）

当 $1\leqslant x\leqslant 6$ 时，$2x-2+6-x>12$，则 $x>8$，无解；……（3 分）

当 $x>6$ 时，$2x-2+x-6>12$，则 $x>\frac{20}{3}$，故 $x>\frac{20}{3}$；……（4 分）

故不等式 $f(x)>12$ 的解集为 $\left\{x\middle|x<-\frac{4}{3}\text{或}x>\frac{20}{3}\right\}$；……（5 分）

(2)依题意，$f(x)=2a$，

而 $f(x)=|2x-2|+|x-6|=|x-1|+|x-1|+|x-6|\geqslant|x-1|+|x-6|$，

而 $|x-1|+|x-6|\geqslant 5$，……（7 分）

当且仅当 $1\leqslant x\leqslant 6$ 时等号成立，……（8 分）

因为 $A\neq\varnothing$，故 $2a\geqslant 5$，则 $a\geqslant\frac{5}{2}$，故实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$. ……（10 分）

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 ‘’ 专业、专注、有态度 ‘’ 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。