

2022-2023 学年下学期高二期末摸底考试

数学

考生注意：

1. 本试卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 考生作答时，请将答案答在答题卡上，选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡对应题的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试卷、草稿纸上作答无效。**

3. 本卷命题范围：高中全部内容。

一、单项选择题：本题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x \leq 1\}$ ， $B = \{x | 2^x > 1\}$ ，则 $A \cap B =$ ()
A. $[1, +\infty)$ B. $[-1, +\infty)$ C. $(0, 1]$ D. $(0, 1)$
2. 若 $iz = 2 + i$ ，则 $\bar{z} =$ ()
A. $1 + 2i$ B. $-1 + 2i$ C. $1 - 2i$ D. $-1 - 2i$
3. 若等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = b_1, a_2 = b_2 = 2, b_3 = 16$ ，则 $\{a_n\}$ 的公差为 ()
A. -1 B. 1 C. -2 D. 2
4. 在财务审计中，我们可以用本福特定律来检验数据是否造假。本福特定律指出，在一组没有人为编造的自然生成的数据（均为正实数）中，首位非零数字是 $1, 2, \dots, 9$ 这九个事件并不是等可能的。具体来说，假设随机变量 X 是一组没有人为编造的数据的首位非零数字，则 $P(X = k) = \lg \frac{k+1}{k}$ ， $k = 1, 2, \dots, 9$ 。根据本福特定律，首位非零数字是 1 的概率与首位非零数字是 8 的概率之比约为 ()（参考数据： $\lg 2 \approx 0.301$ ， $\lg 3 \approx 0.477$ ）
A. 4 B. 5 C. 6 D. 7
5. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 满足 $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ ，则 $\overrightarrow{AD} =$ ()
A. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ B. $-\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ C. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ D. $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

6. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1 (a > \sqrt{3})$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , A 为上顶点, 若 ΔAF_1F_2 的面积为 $\sqrt{3}$, 则 ΔAF_1F_2 的周长为 ()

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

7. 设 $a = \log_2 \pi$, $b = \sin 1$, $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 ()

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $a > c > b$ D. $c > b > a$

8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R , 且 $f(x) < 1 - f'(x)$, $f(0) = 4$, 则不等式 $f(x) < 1 + \frac{3}{e^x}$ 解集为 ()

- A. $(1, +\infty)$ B. $(-\infty, 1)$ C. $(-\infty, 0)$ D. $(0, +\infty)$

二、多项选择题: 本题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项是符合题目要求的. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 以下四个命题中, 真命题的有 ()

A. 在回归分析中, 可用相关指数 R^2 的值判断模型的拟合效果, R^2 越大, 模型的拟合效果越好;

B. 回归模型中残差是实际值 y_i 与估计值 \hat{y} 的差, 残差点所在的带状区域宽度越窄, 说明模型拟合精度越高;

C. 对分类变量 x 与 y 的统计量 χ^2 来说, χ^2 值越小, 判断“ x 与 y 有关系”的把握程度越大;

D. 已知随机变量 X 服从二项分布 $B\left(n, \frac{1}{3}\right)$, 若 $E(3X + 1) = 6$, 则 $n = 6$.

10. 已知函数 $f(x) = \sin \omega x + \cos \omega x (\omega > 0)$ 图象的最小正周期是 π , 则 ()

A. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{8}, 0\right)$ 对称

B. 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度, 得到的函数图象关于 y 轴对称

C. $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域为 $[-1, 1]$

D. $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$ 上单调递增

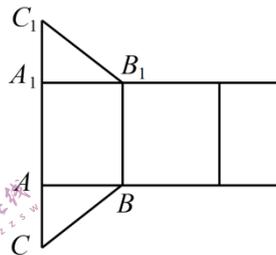
11. 已知函数 $f(x) = x^3 - x + 2$, 则 ()

- A. 函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递增
 B. $f(x)$ 有三个零点
 C. $f(x)$ 有两个极值点
 D. 直线 $y = 2x$ 是曲线 $y = f(x)$ 的切线

12. 在通用技术课上, 某小组将一个直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 展开, 得到的平面图如图所示.

其中 $AB = 4$, $AC = 3$, $BC = AA_1 = 5$, M 是线段 BB_1 上的动点, 则 ()

- A. AM 与 A_1C_1 是异面直线
 B. $AC \perp A_1M$
 C. 平面 AB_1C 将三棱柱截成两个四面体
 D. $A_1M + MC$ 的最小值是 $\sqrt{106}$



三、填空题: 本题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知平面向量 $\vec{a} = (\sqrt{3}, 1)$, $\vec{b} = (1, -\sqrt{3})$, 求 $|\vec{a} + 2\vec{b}| =$ _____.

14. 已知定义在 \mathbb{R} 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = f(3-x)$, 则 $f(x)$ 的一个解析式为 $f(x) =$ _____.

15. 有三台车床加工同一型号的零件, 第一台加工的次品率为 0.06, 第二三台加工的次品率均为 0.05, 加工出来的零件混放在一起. 已知第一, 二, 三台车床加工的零件数分别占总数的 0.25, 0.3, 0.45, 任取一个零件, 求它是次品的概率 _____.

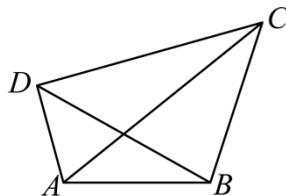
16. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \begin{cases} 3a_n, n \text{ 为奇数} \\ a_n + 2, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 则 $a_8 =$ _____, 当 n 为偶数时, $a_n =$ _____.

四、解答题: 本题共 6 个小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle ADB = 45^\circ$, $\angle BAD = 105^\circ$, $AD = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $BC = 2$,

$AC = 3$.

- (1) 求边 AB 的长;
 (2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.



18. 已知公差为零的等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为1, 且 a_1, a_2, a_5 是一个等比数列的前三项, 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 求数列 $\{(-1)^n S_n\}$ 的前 $2n$ 项的和.

19. 飞盘运动是一项入门简单, 又具有极强的趣味性和社交性的体育运动, 目前已经成为了年轻人运动的新潮流. 某俱乐部为了解年轻人爱好飞盘运动是否与性别有关, 对该地区的年轻人进行了简单随机抽样, 得到如下列联表:

性别	飞盘运动		合计
	不爱好	爱好	
男	6	16	22
女	4	24	28
合计	10	40	50

(1) 在上述爱好飞盘运动的年轻人中按照性别采用分层抽样的方法抽取10人, 再从这10人中随机选取3人访谈, 记参与访谈的男性人数为 X , 求 X 的分布列和数学期望;

(2) 依据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验, 能否认为爱好飞盘运动与性别有关联? 如果把上表中所有数据都扩大到原来的10倍, 在相同的检验标准下, 再用独立性检验推断爱好飞盘运动与性别之间的关联性, 结论还一样吗? 请解释其中的原因.

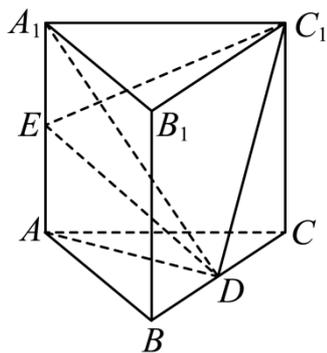
$$\text{附: } \chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中 } n = a+b+c+d.$$

α	0.1	0.01	0.001
x_α	2.706	6.635	10.828

20. 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $BC=CC_1=2$, D 为 BC 的中点, 点 E 在 AA_1 上.

(1) 证明: $BC \perp$ 平面 A_1AD ;

(2) 若二面角 A_1-DE-C_1 大小为 30° , 求以 A_1, E, D, C_1 为顶点的四面体体积.



21. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线方程为 $\sqrt{3}x + y = 0$, 且左焦点 F 到渐近线的距离为 $\sqrt{3}$, 直线 l_1, l_2 经过 F 且互相垂直 (斜率都存在且不为 0), 与双曲线 C 分别交于点 A, B 和 M, N , D, E 分别为 AB, MN 的中点.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 证明: 直线 DE 过定点.

22. 已知函数 $f(x) = 2x \ln x - 2ax^2, a \in \mathbb{R}$.

(1) 当 $a = \frac{1}{2}$, 求 $f(x)$ 的单调递减区间;

(2) 若 $f(x) \leq \frac{f'(x)}{2} - \ln x - 1$ 在 $(1, +\infty)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.