秘密★启用前

2021届“3+3+3”高考备考诊断性联考卷（一）
理科数学

注意事项：

1. 答题前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚.

2. 每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 在试题卷上作答无效.

3. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回. 满分150分，考试用时120分钟.

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知集合 $A=\{x|y=\lg(1-x)\}$，$B=\{x|x+2>0\}$，则 $A\cap B=$

A. $(-1,2)$　　B. $(-2,1)$

C. $(-2,-1)$　　D. $(1,2)$

2. 设复数 z 满足 $z(2+i)=1$，则 z 的虚部是

A. $-\frac{1}{3}$　　B. $-\frac{1}{3}i$

C. $-\frac{1}{5}$　　D. $-\frac{1}{5}i$

3. 设一组样本数据 x_1，x_2，…，x_n 的均值和标准差均为1.1，若 ax_1+b，ax_2+b，…，$ax_n+b(a>0)$ 的均值和标准差分别为3.2，2.2，则 a，b 的值分别为

A. 2，1　　B. 2，2

C. 2.1，1　　D. 2.1，2

4. 某项研究成果发现，试管内某种病毒细胞的总数 y 和天数 t 的函数关系为 $y=3^{t-1}$，且该种病毒细胞的个数超过 10^8 时会发生变异，则该种病毒细胞实验最多进行的天数为（　　）天（$\lg3\approx0.477$）.

A. 15　　B. 16

C. 17　　D. 18

5. 抛物线 $y=\frac{1}{8}x^2$ 的焦点为 F，在抛物线上有一点 P，$|PF|=8$，点 M 在准线上，使得 $\angle PFM=90°$，则 M 的坐标为

A. $\left(\frac{4}{3}\sqrt{3},-2\right)$　　B. $\left(-2,\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$ 或 $\left(-2,\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$

C. $\left(\frac{4}{3}\sqrt{3},-2\right)$ 或 $\left(\frac{2}{3}\sqrt{3},-2\right)$　　D. $\left(\frac{4}{3}\sqrt{3},-2\right)$ 或 $\left(-\frac{4}{3}\sqrt{3},-2\right)$

6. 已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，满足 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影为 $-\frac{1}{2}$，则 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 的夹角的余弦值为

A. $-\frac{\sqrt{6}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{21}}{7}$

C. $-\frac{\sqrt{21}}{7}$　　D. $-\frac{\sqrt{7}}{7}$

7. 在 $\triangle ABC$ 中，$\cos A=\frac{2}{5}$，$BC=\sqrt{37}$，$AC=5$，则 $\triangle ABC$ 的面积为

A. 2　　B. $2\sqrt{6}$

C. 6　　D. $3\sqrt{21}$

8. 某医院派出 6 名医生去到 3 个社区宣传防控新冠肺炎疫情知识，每个社区至少安排 1 位医生，则共有（　　）种不同的安排方法.

A. 540　　B. 1080

C. 630　　D. 75

9. 某几何体的三视图如图 1 所示，则这个几何体的表面积为

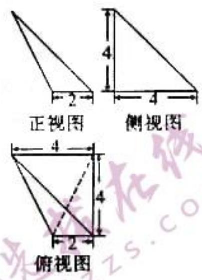


图 1

A. $24+12\sqrt{2}$

B. $16+12\sqrt{2}$

C. $24+14\sqrt{2}$

D. $28+8\sqrt{2}$

10. 已知函数 $f(x)=x^2$ 的图象在 $x=1$ 处的切线与函数 $g(x)=\frac{e^x}{\sqrt{a}}$ 的图象相切，则实数 $a=$

A. e　　B. $\frac{e^3}{4}$

C. $\frac{e}{4}$　　D. e^3

11. 已知 P 为双曲线 C：$\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 上的任意一点．过 P 点作直线分别与双曲线的两条渐近线相交于 A，B 两点，若 $\overrightarrow{PA}=-2\overrightarrow{PB}$，则 A，B 两点的横坐标之积为

A. 2　　B. 4　　C. $\frac{9}{2}$　　D. 9

12. 已知命题 P："若 $a=\frac{2020^3+1}{2020^4+1}$，$b=\frac{2020^4+1}{2020^5+1}$，则 $a>b$"，命题 Q："在 $\triangle ABC$ 中，若内角 A，B 满足 $\sin A=\cos B$，则 $\triangle ABC$ 为直角三角形"，则下列判断正确的是

A. 命题 P 为真命题，命题 Q 为假命题　　B. 命题 P 为假命题，命题 Q 为真命题

C. 命题 P 和命题 Q 都为真命题　　D. 命题 P 和命题 Q 都为假命题

二、**填空题**（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

13. 已知实数 x，y 满足 $\begin{cases}2x-y\geq 8,\\ x+2y\leq 8,\\ y\leq 0,\end{cases}$ 则 $z=x-2y$ 的最小值是__________.

14. 双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{5}=1(a>0)$ 的焦点到渐近线的距离为__________.

15. 已知三棱锥 $S-ABC$ 的棱长均为 $2\sqrt{6}$，则与其各条棱都相切的球的体积为__________.

16. 关于函数 $f(x)=\sin x-\cos x+\sqrt{2}\sin x\cos x$ 有如下四个命题：

①$2\pi$ 是 $f(x)$ 的周期；②$f(x)$ 的图象关于原点对称；③$f(x)$ 的图象关于 $x=\dfrac{3}{4}\pi$ 对称；④$f(x)$ 的最大值为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

其中所有真命题是__________.（填命题序号）

三、**解答题**（共70分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分12分）

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=5$，$a_{n+1}=2a_n-4n+3$.

（1）计算 a_2，a_3，猜想 $\{a_n\}$ 的通项公式并加以证明；

（2）求数列 $\{3^n\cdot a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18.（本小题满分12分）

数字人民币，是中国人民银行尚未发行的法定数字货币，即“数字货币电子支付”. 央行数字货币不计付利息，可用于小额、零售、高频的业务场景，相比于纸币没有任何差别. 数字人民币试点地区是深圳、苏州、雄安新区、成都及未来的冬奥场景. 为了解居民对数字人民币的了解程度，某社区居委会随机抽取1200名社区居民参与问卷测试，并将问卷得分绘制频率分布表如下：

得分	[30，40)	[40，50)	[50，60)	[60，70)	[70，80)	[80，90)	[90，100]
男性人数	30	110	110	150	130	80	40
女性人数	20	60	70	180	140	50	30

（1）将居民对数字人民币的了解程度分为“比较了解”（得分不低于60分）和“不太了解”（得分低于60分）两类，完成2×2列联表，并判断是否有99%的把握认为“数字人民币的了解程度”与“性别”有关?

	不太了解	比较了解	总计
男性			
女性			
总计			

（2）从参与问卷测试且得分不低于80分的居民中，按照性别进行分层抽样，共抽取10人，连同 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 名男性调查员一起组成3个环保宣传队. 若从这 $n+10$ 中随机抽取3人作为队长，且男性队长人数占的期望不小于2，求 n 的最小值.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

临界值表：

$P(K^2\geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19.（本小题满分 12 分）

如图 2，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F，G，P 分别是 CD，CC_1，A_1B_1，B_1C_1 的中点，Q 是线段 AB 上的一个动点，且 $AQ=\lambda AB(0\leqslant\lambda\leqslant1)$.

（1）证明：$PF\subset$平面 GEF；

（2）当二面角 $Q-EG-F$ 的余弦值为$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$时，求 λ.

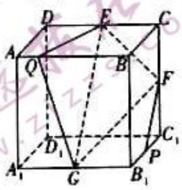


图 2

20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，过椭圆右焦点的所有直线中被椭圆所截得的最短弦长为 1.

（1）求椭圆的标准方程；

（2）已知直线 l 的斜率不为 0，若 l 过点 $P(1,0)$交椭圆于 A，B 两点，在椭圆长轴所在直线上是否存在一定点 Q，使$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$为定值，若存在，求出定点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x-\ln x$.

（1）求函数 $f(x)$的最小值；

（2）已知实数 $a>0$，e 为自然对数的底数，若 $f(x)+ae^{2x}+\ln a\geqslant0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立，求实数 a 的取值范围.

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答，并用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑．注意所做题目的题号必须与所涂题目的题号一致，在答题卡选答区域指定位置答题．如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（本小题满分 10 分）【选修 4-4：坐标系与参数方程】

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=2\cos\theta-2\sqrt{3}\sin\theta,\\ y=2\sin\theta+2\sqrt{3}\cos\theta,\end{cases}$（$\theta$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴，取相同长度单位建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=4$.

（1）求曲线 C 的直角坐标方程；

（2）直线 l 与 x 轴的交点为 M，经过点 M 的动直线 l_2 与曲线 C 交于 P，Q 两点，证明：$|MP||MQ|$为定值.

23.（本小题满分 10 分）【选修 4-5：不等式选讲】

已知函数 $f(x)=|x+m|+|3-x|$，$x\in\mathbf{R}$.

（1）证明：当 $m=5$ 时，$\ln f(x)>2$；

（2）若函数 $g(x)=|2x-2m^2-7|+|x+m|$，$x\in\mathbf{R}$，且关于 x 的不等式 $g(x)\geqslant f(x)+\dfrac{3}{2}m$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

2021届“3+3+3”高考备考诊断性联考卷（一）
理科数学参考答案

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	A	C	D	C	D	A	B	B	C	A

【解析】

1．由题意得 $A=\{x\mid x<1\}$，$B=\{x\mid x>-2\}$，故 $A\cap B=(-2,\ 1)$，故选B.

2．$z=\dfrac{1}{2+\mathrm{i}}=\dfrac{2-\mathrm{i}}{2^2-\mathrm{i}^2}=\dfrac{2-\mathrm{i}}{5}=\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$，虚部为 $-\dfrac{1}{5}$，故选C.

3．依题意得 $a\cdot 1.1+b=3.2$，$a\cdot 1.1=2.2$，解得 $a=2$，$b=1$，故选A.

4．取 $y=3^{t-1}=10^8$，故 $t-1=\log_3 10^8=8\log_3 10$，即 $t=8\log_3 10+1=8\left(\dfrac{1}{\lg 3}\right)+1\approx 17.77$，故该种病毒细胞实验最多进行的天数为17，故选C.

5．$\because x^2=8y$，$\therefore p=4$，$F(0,\ 2)$，设 $P(x_1,\ y_1)$，$\therefore |PF|=y_1+\dfrac{p}{2}=8$，$\therefore y_1=6$，$\therefore P(\pm4\sqrt{3},\ 6)$，设 $M(x_0,\ -2)$，$\because \angle PFM=90^\circ$，$\overrightarrow{FP}=(\pm4\sqrt{3},\ 4)$，$\overrightarrow{MF}=(-x_0,\ 4)$，$\therefore \overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{MF}=0$，$\therefore x_0=\pm\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，$\therefore M\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3},\ -2\right)$ 或 $M\left(-\dfrac{4\sqrt{3}}{3},\ -2\right)$，故选D.

6．设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ，$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 的投影为 $|\vec{a}|\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$，$\therefore \theta=120^\circ$，设 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 的夹角为 α，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$，$\cos\alpha=\dfrac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{a}-\vec{b}|}=\dfrac{|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2}{|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{a}-\vec{b}|}=-\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，故选C.

7．$AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cos A=BC^2$，即 $25+AB^2-2\times5\times\dfrac{2}{5}AB=37$，即 $AB^2-4AB-12=0$，解得 $AB=6$，$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\sin A=\dfrac{1}{2}\times5\times6\times\dfrac{\sqrt{21}}{5}=3\sqrt{21}$，故选D.

8．$\dfrac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}\cdot A_3^3=90$，$C_6^3C_3^2C_1^1A_3^3=360$，$\dfrac{C_6^1C_5^1C_4^4}{A_2^2}\cdot A_3^3=90$，∴共有 $90+360+90=540$，故选 A．

9．如图 1，$SA=6$，$AC=2\sqrt{5}$，$SC=4\sqrt{2}$，$\cos\angle SAC=\dfrac{36+20-32}{2\times6\times2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\angle SAC=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，∴ $S_{\triangle SAC}=\dfrac{1}{2}\cdot SA\cdot AC\cdot\sin\angle SAC=12$，∴ $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times2\times4=4$，∴ $S_{\triangle SAB}=4\sqrt{2}$，∴ $S_{\triangle SBC}=8\sqrt{2}$，∴表面积为 $16+12\sqrt{2}$，故选 B．

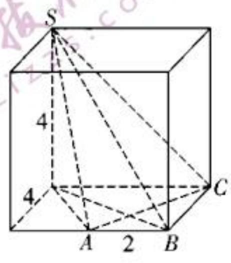


图 1

10．由 $f(x)=x^2$，得 $f'(x)=2x$，则 $f'(1)=2$，又 $f(1)=1$，所以函数 $f(x)=x^2$ 的图象在 $x=1$ 处的切线为 $y-1=2(x-1)$，即 $y=2x-1$．设 $y=2x-1$ 与函数 $g(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{a}}$ 的图象相切于点 $(x_0,\ y_0)$，由 $g'(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{a}}$，可得 $\begin{cases}g'(x_0)=\dfrac{e^{x_0}}{\sqrt{a}}=2,\\ g(x_0)=\dfrac{e^{x_0}}{\sqrt{a}}=2x_0-1,\end{cases}$ 解得 $x_0=\dfrac{3}{2}$，$\sqrt{a}=\dfrac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}=\dfrac{e\sqrt{e}}{2}$，$a=\left(\dfrac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}\right)^2=\dfrac{e^3}{4}$，故选 B．

11．依题意可得双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{1}{2}x$，设 $P(x,\ y)$，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，因为 $\overrightarrow{PA}=-2\overrightarrow{PB}$，所以有 $\begin{cases}x_1-x=-2(x_2-x),\\ y_1-y=-2(y_2-y),\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=\dfrac{x_1+2x_2}{3},\\ y=\dfrac{y_1+2y_2}{3},\end{cases}$ 又 $\begin{cases}y_1=\dfrac{1}{2}x_1,\\ y_2=-\dfrac{1}{2}x_2,\end{cases}$ 所以 $y_1+2y_2=\dfrac{1}{2}x_1-x_2$，所以 $\begin{cases}x=\dfrac{x_1+2x_2}{3},\\ y=\dfrac{\frac{1}{2}x_1-x_2}{3},\end{cases}$ 因为点 P 在双曲线上，所以 $\dfrac{\left(\dfrac{x_1+2x_2}{3}\right)^2}{4}-\left(\dfrac{\frac{1}{2}x_1-x_2}{3}\right)^2=1$，解得 $x_1x_2=\dfrac{9}{2}$，故选 C．

12. 对命题 P: 设 $f(x)=2020^x+1$，则 $a=\dfrac{f(3)}{f(4)}$，$b=\dfrac{f(4)}{f(5)}$，$\therefore 1-a=\dfrac{f(4)-f(3)}{f(4)}=\dfrac{2020^4-2020^3}{2020^4+1}$

$=\dfrac{2019\times2020^3}{2020^4+1}=\dfrac{2019\times2020^4}{2020^5+2020}$，　$1-b=\dfrac{f(5)-f(4)}{f(5)}=\dfrac{2020^5-2020^4}{2020^5+1}=\dfrac{2019\times2020^4}{2020^5+1}$，

$\because 2020^5+2020>2020^5+1$，$\therefore 1-a<1-b$，即 $a>b$，故 P 为真命题，命题 Q 为假命题，

例如 $A=120°$，$B=30°$，可知命题 Q 为假命题，故选 A.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	4	$\sqrt{5}$	$4\sqrt{3}\pi$	①③④

【解析】

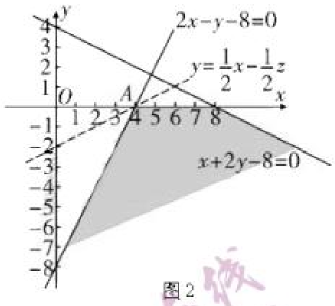


图 2

13. 画出不等式组表示的可行域，如图 2 中阴影部分所示．由 $z=x-2y$，可得 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{z}{2}$．平移直线 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{z}{2}$，结合图形可得，当直线 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{z}{2}$ 经过可行域内的点 A 时，直线在 y 轴上的截距最大，此时 z 取得最小值．由题意得 A 点坐标为 $(4,0)$，$\therefore z_{\min}=4-0=4$，即 $z=x-2y$ 的最小值是 4.

14. 用点到直线的距离公式可得双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ 中焦点到渐近线的距离为 b.

15. 三棱锥 $S-ABC$ 各条棱都相切的球相当于棱长为 $2\sqrt{3}$ 的正方体的内切球，则 $R=\sqrt{3}$，所以体积为 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=4\sqrt{3}\pi$.

16. $f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)-\cos(x+2\pi)+\sqrt{2}\sin(x+2\pi)\cos(x+2\pi)=\sin x-\cos x+\sqrt{2}\sin x\cos x$ $=f(x)$，①是真命题；$f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+\sqrt{2}\sin(-x)\cos(-x)=-\sin x-\cos x-\sqrt{2}\sin x\cos x$，$f(-x)+f(x)\neq0$，②是假命题；$f\left(\dfrac{3}{2}\pi-x\right)=\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi-x\right)-\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi-x\right)+\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi-x\right)\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi-x\right)=-\cos x+\sin x+\sqrt{2}\sin x\cos x=f(x)$，③是真

$t=\sin x-\cos x$，则 $t^2=(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x$，故 $\sqrt{2}\sin x\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}t^2$，故

函数可看做 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}t^2+t+\frac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2})$，当 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$y_{\max}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，④是真命题.

三、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 12 分）

解：（1）由题意可得 $a_2=2a_1-4+3=10-4+3=9$，

$a_3=2a_2-8+3=18-8+3=13$，

……………………………………………………（2 分）

由数列 $\{a_n\}$ 的前三项可猜想数列 $\{a_n\}$ 是以 5 为首项，4 为公差的等差数列，

即 $a_n=4n+1$．……………………………………………………（3 分）

证明如下：当 $n=1$ 时，$a_1=5$ 成立；

假设 $n=k$ 时，$a_k=4k+1$ 成立，

那么 $n=k+1$ 时，$a_{k+1}=2a_k-4k+3=2(4k+1)-4k+3=4k+5=4(k+1)+1$ 也成立，

则对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，

都有 $a_n=4n+1$ 成立．……………………………………………………（6 分）

（2）由（1）可知，$a_n\cdot 3^n=(4n+1)\cdot 3^n$，

$S_n=5\times 3+9\times 3^2+13\times 3^3+\cdots+(4n-3)\cdot 3^{n-1}+(4n+1)\cdot 3^n$，①

$3S_n=5\times 3^2+9\times 3^3+13\times 3^4+\cdots+(4n-3)\cdot 3^n+(4n+1)\cdot 3^{n+1}$，②

……………………………………………………（8 分）

由①－②得 $-2S_n=15+4\times(3^2+3^3+\cdots+3^n)-(4n+1)\cdot 3^{n+1}$

$=15+4\times\frac{3^2\times(1-3^{n-1})}{1-3}-(4n+1)\cdot 3^{n+1}=-(4n-1)\cdot 3^{n+1}-3$，

即 $S_n=\frac{(4n-1)}{2}\cdot 3^{n+1}+\frac{3}{2}$．

……………………………………………………

18．（本小题满分 12 分）

解：（1）由题意得列联表如下：

	不太了解	比较了解	总计
男性	250	400	650
女性	150	400	550
总计	400	800	1200

……………………………………………（2 分）

K^2 的观测值 $k=\dfrac{1200\times(250\times400-150\times400)^2}{400\times800\times650\times550}\approx16.783$，

……………………………………………（4 分）

因为 $16.783>6.635$， ……………………………………………（5 分）

所以有 99%的把握认为居民对数字人民币的了解程度与性别有关．

……………………………………………（6 分）

（2）由题意知，分层抽样抽取的 10 人中，男性 6 人，女性 4 人，

……………………………………………（7 分）

随机变量 ξ 的所有可能取值为 0，1，2，3，

其中 $P(\xi=0)=\dfrac{C_{n+6}^0C_4^3}{C_{n+10}^3}$， $P(\xi=1)=\dfrac{C_{n+6}^1C_4^2}{C_{n+10}^3}$，

$P(\xi=2)=\dfrac{C_{n+6}^2C_4^1}{C_{n+10}^3}$， $P(\xi=3)=\dfrac{C_{n+6}^3}{C_{n+10}^3}$， ……………………………………………（9 分）

所以随机变量 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\dfrac{C_{n+6}^0C_4^3}{C_{n+10}^3}$	$\dfrac{C_{n+6}^1C_4^2}{C_{n+10}^3}$	$\dfrac{C_{n+6}^2C_4^1}{C_{n+10}^3}$	$\dfrac{C_{n+6}^3}{C_{n+10}^3}$

$E(\xi)=\dfrac{C_{n+6}^0C_4^3}{C_{n+10}^3}\times0+\dfrac{C_{n+6}^1C_4^2}{C_{n+10}^3}\times1+\dfrac{C_{n+6}^2C_4^1}{C_{n+10}^3}\times2+\dfrac{C_{n+6}^3}{C_{n+10}^3}\times3\geqslant2$，

……………………………………………（10 分）

$C_{n+6}^1C_4^2\times1+C_{n+6}^2C_4^1\times2+C_{n+6}^3\times3\geqslant2C_{n+10}^3$，

可得，$6(n+6)+4(n+6)(n+5)+\frac{1}{2}(n+6)(n+5)(n+4)\geqslant\frac{1}{3}(n+10)(n+9)(n+8)$，

$3(n+6)(n^2+17n+72)\geqslant 2(n+10)(n+9)(n+8)$，

$3(n+6)\geqslant 2(n+10)$，解得 $n\geqslant 2$，

$\therefore n$ 的最小值为 2. …………………………………………（12 分）

19.（本小题满分 12 分）

（1）证明：如图 3，连接 B_1C，

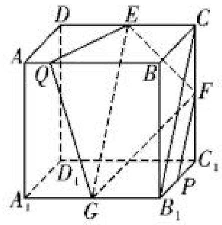


图 3

在 $\triangle C_1CB_1$ 中，P，F 分别是 B_1C_1，C_1C 的中点，

所以 PF 是 $\triangle C_1CB_1$ 的中位线，

则 $PF\,/\!/\,B_1C$．

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$DC\,/\!/\,A_1B_1$，G，E 分别是 A_1B_1，DC 的中点，

则 $EC\,/\!/\,GB_1$，$EC=GB_1$，

所以四边形 GB_1CE 是平行四边形，则 $B_1C\,/\!/\,GE$，

所以 $PF\,/\!/\,GE$，

所以 $PF\subset$ 平面 GEF. ……………………………（6 分）

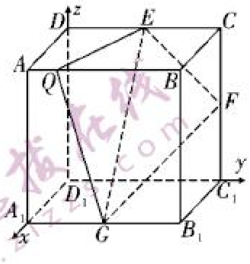


图 4

（2）解：以 D_1 为原点，建立如图 4 所示空间直角坐标系，$E(0,\ 1,\ 2)$，

$F(0,\ 2,\ 1)$，$G(2,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{GE}=(-2,\ 0,\ 2)$，$\overrightarrow{EF}=(0,\ 1,\ -1)$，

因为 $AQ=\lambda AB(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$，所以 $Q(2,\ 2\lambda,\ 2)$，

$\overrightarrow{QE}=(-2,\ 1-2\lambda,\ 0)$． ……………………………………………（7 分）

设平面 EFG 的一个法向量为 $\vec{m}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{GE}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x_1+2z_1=0,\\ y_1-z_1=0,\end{cases}$

令 $x_1=1$，则 $z_1=1$，$y=1$，

所以 $\vec{m}=(1,\ 1,\ 1)$． ……………………………………………（8 分）

设平面 QEG 的一个法向量为 $\vec{n}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{GE}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{QE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x_2+2z_2=0,\\ -2x_2+(1-2\lambda)y_2=0,\end{cases}$

令 $x_2=1-2\lambda$，则 $z_2=1-2\lambda$，$y_2=2$，

所以 $\vec{n}=(1-2\lambda,\ 2,\ 1-2\lambda)$. ……………………………………………………（9 分）

因为二面角 $Q-EG-F$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $|\cos\langle\vec{m},\ \vec{n}\rangle|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{|4-4\lambda|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{4+2(1-2\lambda)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

解得 $\lambda=\frac{1}{2}$ 或 $\frac{5}{2}$(舍去)， ……………………………………………………（11 分）

所以，当二面角 $Q-EG-F$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$\lambda=\frac{1}{2}$.

……………………………………………………………………（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

解：（1）由题意可得 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{2b^2}{a}=1$，

$\therefore a=2$，$b=1$，

C：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………………………………（4 分）

（2）设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$Q(x_0,\ 0)$，

设直线 l：$x=my+1$，将其代入 $x^2+4y^2-4=0$，

得 $(4+m^2)y^2+2my-3=0$，

$\therefore y_1+y_2=\frac{-2m}{4+m^2}$，$y_1y_2=\frac{-3}{4+m^2}$，

$\therefore x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2=\frac{8}{4+m^2}$，

$x_1x_2=m^2y_1y_2+m(y_1+y_2)+1=\frac{4-4m^2}{4+m^2}$， ……………………………（8 分）

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=t$，则 $t=(x_1-x_0,\ y_1)\cdot(x_2-x_0,\ y_2)=x_1x_2+x_0^2-(x_1+x_2)x_0+y_1y_2$

$=\frac{4-4m^2}{4+m^2}-\frac{8}{4+m^2}x_0-\frac{3}{4+m^2}+x_0^2$， ……………………………（10 分）

$=\frac{17-8x_0}{4+m^2}+x_0^2-4$，

这是一个与 m 无关的常数，

$\therefore x_0=\dfrac{17}{8}$，$t$ 为常数，此时存在定点 $Q\left(\dfrac{17}{8},0\right)$，使 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$ 为定值.

…………………………………………………………（12 分）

21.（本小题满分 12 分）

解：（1）因为 $f(x)=x-\ln x$，故 $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，

…………………………………………………………（1 分）

令 $f'(x)>0$，得 $x>1$，令 $f'(x)<0$，得 $0<x<1$，

故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，　　…………………（3 分）

故函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)=1$.　　……………………………………（4 分）

（2）由题意知 $x-\ln x+ae^{2x}+\ln a\geqslant 0$，即 $ae^{2x}+x+\ln a\geqslant\ln x$，

两边同时加上 x，得 $ae^{2x}+2x+\ln a\geqslant x+\ln x$，

即 $ae^{2x}+\ln(ae^{2x})\geqslant x+\ln x$，　　…………………………………（7 分）

设 $h(x)=x+\ln x(x>0)$，则 $h'(x)=1+\dfrac{1}{x}>0$，故 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$ae^{2x}+\ln(ae^{2x})\geqslant x+\ln x$ 恒成立，即 $h(ae^{2x})\geqslant h(x)$ 恒成立，

…………………………………………………………（9 分）

即 $ae^{2x}\geqslant x$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，即 $a\geqslant\dfrac{x}{e^{2x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

设 $\varphi(x)=\dfrac{x}{e^{2x}}(x>0)$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{1-2x}{e^{2x}}$，

则当 $0<x<\dfrac{1}{2}$ 时，$\varphi'(x)>0$，故 $\varphi(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递增；

当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时，$\varphi'(x)<0$，故 $\varphi(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减，

故 $\varphi(x)_{max}=\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2e}$，　　…………………………………（11 分）

故 $a\geqslant\dfrac{1}{2e}$，故所求实数 a 的取值范围为 $\left[\dfrac{1}{2e},+\infty\right)$.　　………………

22.（本小题满分 10 分）【选修 4-4：坐标系与参数方程】

（1）解：由 $x^2+y^2=(2\cos\theta-2\sqrt{3}\sin\theta)^2+(2\sin\theta+2\sqrt{3}\cos\theta)^2=16$，

得曲线 C 为 $x^2+y^2=16$． ……………………………………………………（5 分）

（2）证明：直线 l 的极坐标方程展开为 $\rho\cos\alpha+\sqrt{3}\rho\sin\alpha=8$，

故 l 的直角坐标方程为 $x+\sqrt{3}y=8$．

显然 M 的坐标为 $(8,\ 0)$，不妨设过点 M 的直线方程为 $\begin{cases}x=8+t\cos\beta,\\ y=t\sin\beta,\end{cases}$（$t$ 为参数），

代入 C 得 $t^2+16\cos\beta t+48=0$，设 P，Q 对应的参数为 t_1，t_2，

所以 $|t_1t_2|=48$ 为定值． ……………………………………………………（10 分）

23.（本小题满分 10 分）【选修 4-5：不等式选讲】

（1）证明：当 $m=5$ 时，$f(x)=|x+5|+|3-x|\geqslant|(x+5)+(3-x)|=8>e^2$，

则 $\ln f(x)\geqslant\ln 8>\ln e^2=2$ 成立． ……………………………………（5 分）

（2）解：关于 x 的不等式 $g(x)\geqslant f(x)+\frac{3}{2}m$ 可化为 $|2x-2m^2-7|-|x-3|\geqslant\frac{3}{2}m$，

令 $h(x)=|2x-2m^2-7|-|x-3|=\begin{cases}-x+2m^2+4,\ x\leqslant3,\\ -3x+2m^2+10,\ 3<x<m^2+\frac{7}{2},\\ x-2m^2-4,\ x\geqslant m^2+\frac{7}{2},\end{cases}$

则 $h(x)_{\min}=h\left(m^2+\frac{7}{2}\right)=-m^2-\frac{1}{2}$，即 $-m^2-\frac{1}{2}\geqslant\frac{3}{2}m$，

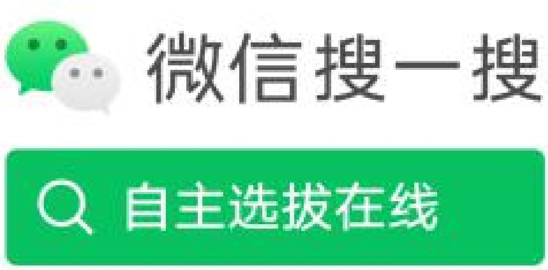
则有 $m^2+\frac{3}{2}m+\frac{1}{2}\leqslant0$，

解得 $-1\leqslant m\leqslant-\frac{1}{2}$． ……………………………………………………

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》