南平市2023届高中毕业班第三次质量检测

数学参考答案及评分标准

说明：

1.本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则.

2.对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.

3.只给整数分数. 选择题和填空题不给中间分.

一、选择题：本题考查基础知识和基本运算，每小题5分，满分40分。

1. C　2. B　3. C　4. C　5. D　6. A　7. B　8. A

二、选择题：本大题共4小题，每小题5分，满分20分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. BD　10. ACD　11. AC　12. BCD

三、填空题：本题考查基础知识和基本运算，每小题5分，满分20分。

13. -20　14. $(-1,-1)$（答案不唯一）　15. $2\sqrt{e}x-y-e=0$　16. $8\sqrt{2}\pi$

四、解答题：本大题共6小题，共70分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10分）

解：(1)依题意，$\{\frac{a_n}{T_n}\}$是以1为首项，2为公差的等差数列，所以$\frac{a_n}{T_n}=1+(n-1)\cdot 2=2n-1$，

……………………2分

即$(2n-1)T_n=a_n$，从而当$n\geq 2$时，有$(2n-3)T_{n-1}=a_{n-1}$，……………………3分

两式相除得，$\frac{(2n-1)a_n}{2n-3}=\frac{a_n}{a_{n-1}}$，由已知得$T_n\neq 0$，从而$a_n\neq 0$，

所以当$n\geq 2$时，$\frac{2n-1}{2n-3}=\frac{1}{a_{n-1}}$，即$a_{n-1}=\frac{2n-3}{2n-1}$，……………………5分

所以$a_n=\frac{2n-1}{2n+1}$.……………………6分

(2)设$\{\frac{T_n}{2n+3}\}$的前n项和为S_n，由(1)得，$T_n=\frac{a_n}{2n-1}$，所以$T_n=\frac{1}{2n+1}$，……………………7分

故$\frac{T_n}{2n+3}=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3})$，……………………8分

所以$S_n=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3})=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3})=\frac{n}{3(2n+3)}$. ....10 分

18. （本小题满分 12 分）

解：

（1）依题意得$\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\sin C+\cos C}{\sin C-\cos C}$，..........2 分

所以$\sin B\sin C-\sin B\cos C=\cos B\sin C+\cos B\cos C$，

所以$\sin(B+C)+\cos(B+C)=0$，..........4 分

所以$\tan(B+C)=-1$即$\tan A=1$，..........5 分

又因为$0<A<\pi$，所以$A=\frac{\pi}{4}$. ....6 分

（2）由$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a\times 2=\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{4}$，..........7 分

所以$a=\frac{\sqrt{2}}{4}bc$.

由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{4}$，..........8 分

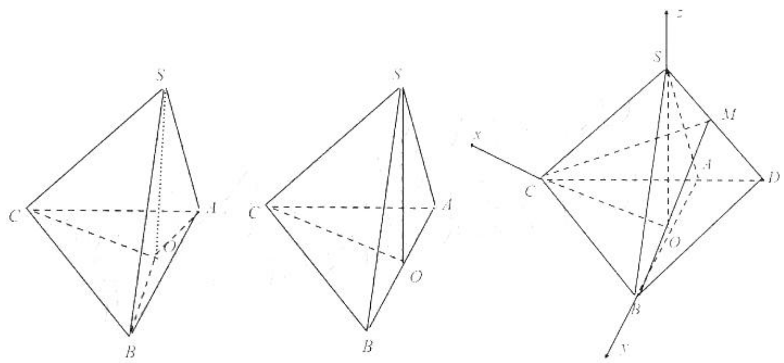
即$a^2=b^2+c^2-\sqrt{2}bc$，

所以$\frac{1}{8}b^2c^2=b^2+c^2-\sqrt{2}bc$，即$\frac{1}{8}b^2c^2+\sqrt{2}bc=b^2+c^2\geqslant 2bc$，..........10 分

所以$bc\geqslant 8\left(2-\sqrt{2}\right)$，当且仅当$b=c$时取“等号”，..........11 分

而$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}bc$，故$(S_{\triangle ABC})_{\min}=\frac{\sqrt{2}}{4}\times 8\left(2-\sqrt{2}\right)=4\sqrt{2}-4$. ....12 分

19.（12 分）



（1）证明：作$SO\perp$平面ABC，垂直为O，则$\angle SBO$为SB与平面ABC所成角，

所以$\angle SBO=\frac{\pi}{3}$，在$\mathrm{Rt}\triangle SBO$中，由$SB=4$可得$BO=2$，$SO=2\sqrt{3}$．……1分

因为$SO\perp$平面ABC，所以$SO\perp CO$，

所以在$\mathrm{Rt}\triangle SCO$中，由$SC=2\sqrt{6}$，$SO=2\sqrt{3}$，可得$CO=2\sqrt{3}$，……2分

在$\triangle BCO$中，由$BC=4$，$CO=2\sqrt{3}$，$BO=2$，可得$BC^2=CO^2+BO^2$，从而$CO\perp BO$，

且$\angle BCO=\frac{\pi}{6}$，……3分

在$\triangle ACO$中，$AC=4$，$\angle ACO=\frac{\pi}{6}$，所以$\triangle ACO\cong\triangle BCO$，

从而$AO=BO=2$，所以$AO+BO=4$，又$AB=4$，所以点O必在AB上，且O为AB的中点．……4分

因为$SO\perp$平面ABC，所以$SO\perp AB$，又$AB\perp CO$，$SO\cap CO=O$，$SO,CO\subset$平面SCO，

所以$AB\perp$平面SCO，从而$SC\perp AB$……6分

（2）解：以点O为坐标原点，OC,OB,OS所在直线分别为x,y,z轴建立如图所示的空间直角坐标系$O-xyz$，……7分

$B(0,2,0)$，$C(2\sqrt{3},0,0)$，$S(0,0,2\sqrt{3})$，$D(-\sqrt{3},-3,0)$，

则$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{OD})=(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},\sqrt{3})$，即$M(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},\sqrt{3})$．……8分

$\overrightarrow{BM}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{7}{2},\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC}=(2\sqrt{3},-2,0)$，

设平面BCM的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BM}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{7}{2}y+\sqrt{3}z=0,\\ 2\sqrt{3}x-2y=0.\end{cases}$

取$y=\sqrt{3}$，可得$\vec{n}=(1,\sqrt{3},4)$，……10分

取平面SBC的一个法向量$\vec{m}=(1,0,0)$，……11分

设所求的角为θ，则$\cos\theta=|\cos<\vec{m},\vec{n}>|=|\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}|=|\frac{1}{\sqrt{20}}|=\frac{\sqrt{5}}{10}$，因此所求平面$SBC$

与平面SAD夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{5}}{10}$ ……………………………………………………………12 分

20.（12 分）

解：(1)因为散点$(v_i,\omega_i)(i=1,2,\cdots,6)$集中在一条直线附近，设回归直线方程为$\hat{\omega}=\hat{b}v+\hat{a}$，

由$\overline{v}=4.1,\overline{\omega}=3.05$，则$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}v_i\omega_i-n\overline{v}\overline{\omega}}{\sum\limits_{i=1}^{n}v_i^2-n\overline{v}^2}=\dfrac{75.3-6\times4.1\times3.05}{101.4-6\times4.1^2}=\dfrac{1}{2}$，……………………………2 分

所以$\hat{a}=\overline{\omega}-\hat{b}\overline{v}=3.05-\dfrac{1}{2}\times4.1=1$，……………………………………………………4 分

所以变量ω关于v的回归方程为$\hat{\omega}=\dfrac{1}{2}v+1$，

令$v=\ln x,\omega=\ln y$，所以$\ln y=\dfrac{1}{2}\ln x+1$，所以$\hat{y}=\mathrm{e}x^{\frac{1}{2}}$，……………………………………6 分

综上，y关于x的回归方程为$y=\mathrm{e}x^{\frac{1}{2}}$．

（2）由$\dfrac{y}{x}=\dfrac{\mathrm{e}x^{\frac{1}{2}}}{x}=\dfrac{\mathrm{e}}{x^{\frac{1}{2}}}\in\left[\dfrac{\mathrm{e}}{9},\dfrac{\mathrm{e}}{7}\right]$，解得$49\leqslant x\leqslant81$，所以$x=50,60,65,72$，

所以 B，C，D，E 为“热门套票”，…………………………………………………………………8 分

则三人中购买“热门套票”的人数X服从超几何分布，X的可能取值为$1,2,3$．

$P(X=1)=\dfrac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\dfrac{1}{5}$，$P(X=2)=\dfrac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\dfrac{3}{5}$，$P(X=3)=\dfrac{C_4^3}{C_6^3}=\dfrac{1}{5}$．……………………………10 分

所以X的分布列为：

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$E(X)=1\times\dfrac{1}{5}+2\times\dfrac{3}{5}+3\times\dfrac{1}{5}=2$．……………………………………………………12 分

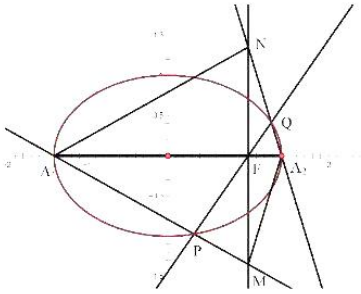
21．（12 分）

解：（1）由题意得

$$\begin{cases} \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ (a+c)(a-c)=1, \end{cases}$$ ……2 分

解得 $a=\sqrt{2}$， $c=1$，所以 $b=1$． ……3 分

椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$． ……4 分



（2）依题意得直线 l_2 的方程为 $x=1$．

设直线 l_1 的方程为 $x=my+1$，$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$．

由 $\begin{cases} x=my+1, \\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1, \end{cases}$ 得

$(m^2+2)y^2+2my-1=0$． ……5 分

$y_1+y_2=-\dfrac{2m}{m^2+2}$， $y_1y_2=-\dfrac{1}{m^2+2}$， ……6 分

所以 $y_1+y_2=2my_1y_2$．

A_1P 的方程为： $y=\dfrac{y_1}{x_1+\sqrt{2}}(x+\sqrt{2})$，

由 $\begin{cases} x=1, \\ y=\dfrac{y_1}{x_1+\sqrt{2}}(x+\sqrt{2}), \end{cases}$ 解得 $y_M=\dfrac{y_1}{x_1+\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})$． ……7 分

A_2Q 的方程为： $y=\dfrac{y_2}{x_2-\sqrt{2}}(x-\sqrt{2})$，

由 $\begin{cases} x=1, \\ y=\dfrac{y_2}{x_2-\sqrt{2}}(x-\sqrt{2}), \end{cases}$ 解得 $y_N=\dfrac{y_2}{x_2-\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})$． ……8 分

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}|FN||A_1F|}{\frac{1}{2}|FM||A_2F|}=\left|\frac{\frac{y_1}{x_1-\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{\frac{y_2}{x_2+\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}\right|=\left|\frac{y_1(x_2+\sqrt{2})}{y_2(x_1-\sqrt{2})}\right|.$$ ……10 分

$$=\left|\frac{y_1(\mathrm{m}\,y_2+1+\sqrt{2})}{y_2(\mathrm{m}\,y_1+1-\sqrt{2})}\right|=\left|\frac{my_1y_2+(1+\sqrt{2})y_1}{my_1y_2+(1-\sqrt{2})y_2}\right|=\left|\frac{\frac{1}{2}(y_1+y_2)+(1+\sqrt{2})y_1}{\frac{1}{2}(y_1+y_2)+(1-\sqrt{2})y_2}\right|$$ ……11 分

$$=\left|\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)y_1+y_2}{y_1+\left(3-2\sqrt{2}\right)y_2}\right|=\left(3+2\sqrt{2}\right)\left|\frac{y_1+\left(3-2\sqrt{2}\right)y_2}{y_1+\left(3-2\sqrt{2}\right)y_2}\right|$$

$=3+2\sqrt{2}$. ……12 分

22.（12 分）

解：（1）$f'(x)=6\mathrm{e}^{2x}+a$，……1 分

当$a\geqslant 0$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，无极值，……2 分

当$a<0$时，由$f'(x)=0$，得$x=\frac{1}{2}\ln(-\frac{a}{6})$，……3 分

当$x\in(0,\frac{1}{2}\ln(-\frac{a}{6}))$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$单调递减；

当$x\in(\frac{1}{2}\ln(-\frac{a}{6}),+\infty)$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$单调递增；

所以当$x=\frac{1}{2}\ln(-\frac{a}{6})$时，函数$f(x)$的极小值为$-\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\ln(-\frac{a}{6})$，无极大值．……4 分

（2）由（1）得$-\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\ln(-\frac{a}{6})=3$，

令$\varphi(a)=-\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\ln(-\frac{a}{6})\ (a>0)$，则$\varphi'(a)=\frac{1}{2}\ln(-\frac{a}{6})$，

由$\varphi'(a)=0$，得$a=-6$，

当$a\in(-\infty,-6)$时，$\varphi'(a)>0$，函数$\varphi(a)$单调递增；

当$a\in(-6,0)$时，$\varphi'(a)<0$，函数$\varphi(a)$单调递减；

所以当且仅当$a=-6$时，函数$\varphi(a)$的最大值为3，

故由$-\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}\ln(-\dfrac{a}{6})=3$，得$a=-6$. 5分

不妨设$x_1<x_2$，当$x\in(0，+\infty)$时，$f'(x)=6(e^{2x}-1)>0$，$f(x)$单调递增；

当$x\in(0，+\infty)$时，$g'(x)=6x^2+6x>0$，$g(x)$单调递增；

所以$|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\lambda|g(x_1)-g(x_2)|$，可化成$f(x_2)-f(x_1)\geqslant\lambda g(x_2)-\lambda g(x_1)$，......6分

即$f(x_2)-\lambda g(x_2)\geqslant f(x_1)-\lambda g(x_1)$，对$0<x_1<x_2$恒成立，

令$h(x)=f(x)-\lambda g(x)=3e^{2x}-2\lambda x^3-3\lambda x^2-6x$，$x\in(0，+\infty)$，

则$h(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增，

所以$h'(x)=6e^{2x}-6\lambda x^2-6\lambda x-6\geq0$在$(0，+\infty)$上恒成立，......7分

设$u(x)=e^{2x}-\lambda x^2-\lambda x-1$，则$u(0)=0$，

$u'(x)=2e^{2x}-2\lambda x-\lambda$，$u'(0)=2-\lambda$，

当$\lambda\leqslant2$时，因为$u''(x)=4e^{2x}-2\lambda$在$(0，+\infty)$上单调递增；

所以$u''(x)\geqslant u''(0)=4-2\lambda\geqslant0$，

所以$u'(x)=2e^{2x}-2\lambda x-\lambda$在$(0，+\infty)$上单调递增；

所以$u'(x)\geqslant u'(0)=2-\lambda\geqslant0$，

所以$u(x)=e^{2x}-\lambda x^2-\lambda x-1$在$(0，+\infty)$上单调递增；

所以$u(x)\geqslant u(0)=0$，

所以 $h'(x)=6u(x)\geqslant 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立. .... 10 分

当 $\lambda>2$ 时，令 $u''(x)=4e^{2x}-2\lambda=0$，得 $x=\frac{1}{2}\ln\frac{\lambda}{2}$，

当 $x\in(0,\frac{1}{2}\ln\frac{\lambda}{2})$ 时，$u''(x)<0$，

所以当 $x\in(0,\frac{1}{2}\ln\frac{\lambda}{2})$ 时函数 $u'(x)$ 单调递减，$u'(x)<u'(0)<0$，

所以当 $x\in(0,\frac{1}{2}\ln\frac{\lambda}{2})$ 时函数 $u(x)$ 单调递减，$u(x)<u(0)=0$，

所以当 $x\in(0,\frac{1}{2}\ln\frac{\lambda}{2})$ 时 $h'(x)=6u(x)<0$，矛盾.

综上所述，$\lambda\leqslant 2$. .... 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。