名卷·A10联盟2023

数学试

巢湖一中 合肥八中 淮南二中 六安一中 南陵中学 舒城
滁州中学 池州一中 阜阳一中 灵璧中学 宿城一中 合肥

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分。

第Ⅰ卷（选择题 共60分）

选择题（本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. 若集合 $A=\{x|x=4k-3,k\in N\}$，$B=\{x|(x+3)(x-9)\leqslant 0\}$，则 $A\cap B$ 的元素个数为（　　）

A. 2　　B. 3　　C. [illegible]　　D. 5

2. $\frac{3i-5}{2+i}$ 的虚部为（　　）

A. $\frac{11}{5}i$　　B. $\frac{11}{5}$　　C. $-\frac{7}{5}i$　　D. $-\frac{7}{5}$

3. 设 $a\in \mathbf{R}$，则"$a=1$"是"$f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+ax)$ 为奇函数"的（　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 积极参加公益活动是践行社会主义核心价值观的具体行动. 现将包含甲、乙两人的5位同学分成2个小组分别去敬老院和老年活动中心参加公益活动，每个小组至少一人，则甲、乙两名同学不分在同一小组的安排方法的总数为（　　）

A. 12　　B. 14　　C. 15　　D. 16

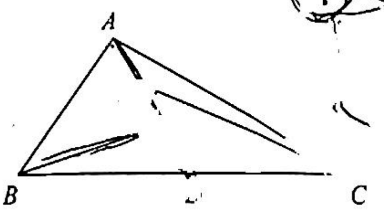
5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 为线段 BC 的中点，点 E,F 分别是线段 AD 上靠近 D,A 的三等分点，则 $\overrightarrow{AD}=$（　　）

A. $-\overrightarrow{BE}-\frac{1}{3}\overrightarrow{CF}$

B. $-\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{CF}$

C. $-\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{CF}$

D. $-\frac{4}{9}\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{CF}$



第5题图

试题

1

舒城中学 太湖中学 天长中学 屯溪一中 宣城中学
合肥六中 太和中学 合肥七中 科大附中 野寨中学

分。满分150分，考试时间120分钟。请在答题卷上作答。

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，定义 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 两点间的折线距离 $d(A,B)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$，该距离也称曼哈顿距离.已知点 $M(2,0),N(a,b)$，若 $d(M,N)=2$，则 a^2+b^2-4a 的最小值与最大值之和为（　　）

A. 0　　B. -2　　C. -4　　D. -6

7. 已知函数 $f(x)=\sin^2\omega x+\sin\omega x\cos\omega x-1(\omega>0)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上恰有4个不同的零点，则实数 ω 的取值范围是（　　）

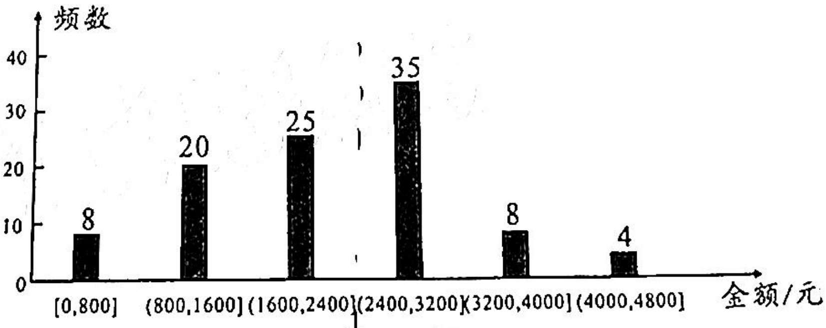
A. $\left[\frac{5}{2},3\right]$　　B. $\left[2,\frac{7}{2}\right)$　　C. $\left(\frac{7}{2},\frac{9}{2}\right]$　　D. $\left(3,\frac{9}{2}\right]$

8. 设 $a=\frac{1}{e^{0.6}}$，$b=0.4$，$c=\frac{\ln 1.4}{1.4}$，则（　　）

A. $a<b<c$　　B. $c<b<$
C. $b<c<a$　　D. $c<a<$

二、选择题（本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得2分，有选错的得0分.）

9. 大年除夕吃年夜饭是中国古老的民俗传统，唐朝诗人孟浩然曾写下“续明催画烛，守岁接长筵”这样的诗句. 为了解某地区居民的年夜饭消费金额，研究人员随机调查了该地区100个家庭，所得金额统计如图所示，则下列说法正确的是（　　）



第9题图

A. 可以估计，该地区年夜饭消费金额在 $(2400,3200]$ 的家庭数量超过总数的三分之一

B. 若该地区有2000个家庭，可以估计年夜饭消费金额超过2400元的有940个

C. 可以估计，该地区家庭年夜饭消费金额的平均数不足2100元

D. 可以估计，该地区家庭年夜饭消费金额的中位数超过2200元

10. 若圆 $C_1: x^2+y^2=4$ 与圆 $C_2: (x-m)^2+(y-n)^2=4$ 的公共弦 AB 的长为 $2\sqrt{3}$，则下列结论正确的有（　　）

A. $m^2+n^2=4$

B. 直线 AB 的方程为 $mx+ny-2=0$

C. AB 中点的轨迹方程为 $x^2+y^2=3$

D. 四边形 AC_1BC_2 的面积为 $\sqrt{3}$

11. 已知圆锥的顶点为 S，高为1，底面圆的直径 $AC=2\sqrt{3}$，B 为圆周上不与 A 重合的动点，F 为线段 AB 上的动点，则（　　）

A. 圆锥的侧面积为 $2\sqrt{3}\pi$

B. $\triangle SAB$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$

C. 直线 SB 与平面 SAC 所成角的最大值为 $\frac{\pi}{3}$

D. 若 B 是 AC 的中点，则 $(SF+CF)^2$ 的最小值为 $10+\sqrt{15}$

12. 已知抛物线 $C: x^2=2py\ (p>0)$ 的焦点 F 到准线的距离为4，直线 l 与 C 交于 P,Q 两点，且 $\overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{PR}$，$R(4,6)$，若过点 P,Q 分别作 C 的两条切线交于点 A，则（　　）

A. $|AF|=4\sqrt{2}$　　　　B. $|PQ|=12$

C. $PQ\perp AF$　　　　D. 以 PQ 为直径的圆过点 A

第Ⅱ卷（非选择题　共90分）

三、填空题（本题共4小题，每小题5分，共20分.）

13. 已知 $\left(3x^2-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)^n$ 展开式中所有项的系数之和为128，则展开式中 x^3 的系数为________.

14. 中国古代经典数学著作《孙子算经》记录了这样一个问题："今有物不知其数，三三数之剩二（除以3余2），五五数之剩三（除以5余3），问物几何？"现将1到200共200个整数中，同时满足"三三数之剩二，五五数之剩三"的数按从小到大的顺序排成一列，构成数列 $\{a_n\}$，则该数列最大项和最小项之和为________.

15. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 A 在 C 的左支上，AF_2 交 C 的右支于点 B，$\angle AF_1B=\frac{2\pi}{3}$，

$\left(\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=0$，则 C 的焦距为________，$\triangle AF_1F_2$ 的面积为________.

16. 若不等式 $\ln x-ax\leq 2a^2-3$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为________.

四、解答题（本题共 6 小题，第 17 题 10 分，第 18~22 题每题 12 分，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17.（本小题满分 10 分）

已知首项为3的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_{n+1}+a_n=S_n+5\cdot 4^n$.

（1）求证：数列 $\{a_n-4^n\}$ 为等比数列；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18.（本小题满分 12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，$\sin^2 A+3\sin^2 C=3\sin^2 B$.

（1）若 $\sin B\cos C=\dfrac{2}{3}$，判断 $\triangle ABC$ 的形状；

（2）求 $\tan(B-C)$ 的最大值.

20.

19.（本小题满分 12 分）

近年来，一种全新的营销模式开始兴起——短视频营销．短视频营销以短视频平台为载体，通过有限时长，构建一个相对完整的场景吸引用户，与用户产生吸引、了解、共鸣、互动、需求的心理旅程．企业通过短视频作为营销渠道，打通新的流量入口，挖掘受众群体，获得新的营销空间．某企业准备在三八妇女节当天通过“抖音”和“快手”两个短视频平台进行直播带货．

（1）已知小李 3 月 7 日选择平台“抖音”、“快手”购物的概率分别为 $0.6, 0.4$，且小李如果第一天选择“抖音”平台，那么第二天选择“抖音”平台的概率为 0.6；如果第一天选择“快手”平台，那么第二天选择“抖音”平台的概率为 0.7．求 3 月 8 日小李选择“抖音”平台购物的概率；

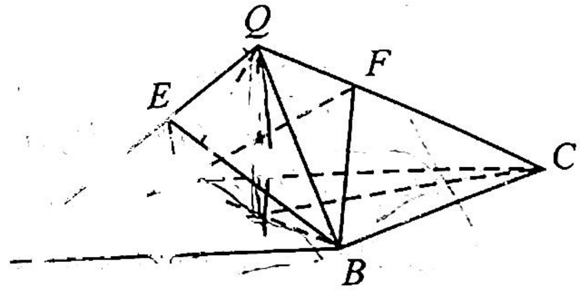
（2）三八妇女节这天，“抖音”平台直播间进行秒杀抢购活动，小李一家三人能下单成功的概率分别为 $p, 2p, 0.5$，三人是否抢购成功互不影响．若 X 为三人下单成功的总人数，且 $E(X)=1.7$，求 p 的值及 X 的分布列．

20.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $Q-ABCD$ 中，点 E,F 分别在棱 QA,QC 上，且三棱锥 $E-ABD$ 和 $F-BCD$ 均是棱长为 2 的正四面体，AC 交 BD 于点 O

（1）求证：$OQ\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）求平面 ADQ 与平面 BCF 所成角的余弦值.



第20题图

21.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 M_1,M_2，短轴长为 $2\sqrt{3}$，点 C 上的点 P 满足直线 PM_1,PM_2 的斜率之积为 $-\dfrac{3}{4}$.

（1）求 C 的方程；

（2）若过点 $(1,0)$ 且不与 y 轴垂直的直线 l 与 C 交于 A,B 两点，记直线 M_1A,M_2B 交于点 Q. 探究：点 Q 是否在定直线上，若是，求出该定直线的方程；若不是，请说明理由.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln\frac{x}{e^2}+\frac{a}{x}$，$a\in\mathbf{R}$.

（1）讨论 $f(x)$ 在 $[3,5]$ 上的单调性；

（2）若 $a=1$，且 $m<n$，$f(m)=f(n)=0$，求证：$2e<m+n<e^2$.

号卷·A10联盟2023届高三4月期中考

数学参考答案

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的 ）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	A	D	C	B	D	B

1. C　由题意得，$A=\{x|x=4k-3,k\in\mathbf{N}\}=\{-3,1,5,9,13,17,\cdots\}$，$B=\{x|-3\leqslant x\leqslant 9\}$，故 $A\cap B=\{-3,1,5,9\}$，即 $A\cap B$ 共有 4 个元素，故选 C.

2. B　$\dfrac{3\mathrm{i}-5}{2+\mathrm{i}}=\dfrac{(3\mathrm{i}-5)(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=-\dfrac{7}{5}+\dfrac{11}{5}\mathrm{i}$，故其虚部为 $\dfrac{11}{5}$，故选 B.

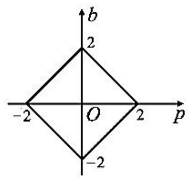
3. A　若 $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+ax\right)$ 为奇函数，则

$f(x)+f(-x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+ax\right)+\ln\left(\sqrt{x^2+1}-ax\right)=\ln\left[(1-a^2)x^2+1\right]=0$，$\therefore 1-a^2=0$，解得 $a=\pm 1$，∴“$a=1$”是“$f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+ax\right)$ 为奇函数”的充分不必要条件，故选 A.

4. D　若按 $1:4$ 分组，甲、乙两名同学不分在同一小组的安排方法有 $2\mathrm{A}_2^2=4$ 种；若按 $2:3$ 分组，甲、乙两名同学不分在同一小组的安排方法有 $(\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_3^3-4)\mathrm{A}_2^2=12$ 种，故甲、乙两名同学不分在同一小组的安排方法有 $4+12=16$ 种.故选 D.

5. C　$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BD}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，则 $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BD}-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BE}$ ①；同理，$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{CD}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$，则 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{CD}-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{CF}$ ②；两式相加，$\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AD}=-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{CF}-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BE}$，即 $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{CF}$，故选 C.

6. B　由题意得，$|a-2|+|b|=2$. 令 $a-2=p$，$|p|+|b|=2$，作出 (p,b) 所表示 的平面区域如图中实线所示，则 $a^2+b^2-4a=(a-2)^2+b^2-4=p^2+b^2-4$，而 p^2+b^2 表示点 (p,b) 到原点 $(0,0)$ 的距离的平方，结合图形可知 p^2+b^2 的最小值为 2，最大值为 4，故 a^2+b^2-4a 的最小值与最大值之和为 $(2-4)+(4-4)=-2$，故选 B.



7. D　由题意得，$f(x)=\dfrac{1}{2}(\sin 2\omega x-\cos 2\omega x-1)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\omega x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{1}{2}$. 令 $f(x)=0$，解得 $\sin\left(2\omega x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. $\because 0<x<\dfrac{\pi}{2}$，$\omega>0$，$\therefore -\dfrac{\pi}{4}<2\omega x-\dfrac{\pi}{4}<\omega\pi-\dfrac{\pi}{4}$，∵ 函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上恰有 4 个不同的零点，$\therefore \dfrac{11\pi}{4}<\omega\pi-\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{17\pi}{4}$，解得 $3<\omega\leqslant\dfrac{9}{2}$. 故选 D.

8. B　由 $\mathrm{e}^x\geqslant x+1$（当且仅当 $x=0$ 取等号）知，$a=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{0.6}}=\mathrm{e}^{-0.6}>-0.6+1=0.4=b$. 令 $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\dfrac{x^2+\ln x-1}{x^2}$，令 $g(x)=x^2+\ln x-1$，易得 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，∴当 $1<x<2$ 时，

$g(x)>g(1)=0$，$f'(x)>0$，$\therefore f(x)$在$(1,2)$上单调递增，$\therefore f(1.4)>f(1)=0$，即

$1.4-1-\dfrac{\ln 1.4}{1.4}>0$，$\therefore b>c$，$\therefore c<b<a$，故选 B.

二、选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.）

题号	9	10	11	12
答案	ABD	AB	AC	ACD

9. ABD　由题意得，年夜饭消费金额在$(2400,3200]$的频率为$\dfrac{35}{100}=0.35$，故 A 正确；若该地区有 2000 个家庭，可以估计年夜饭超过 2400 元的家庭个数为$2000\times\dfrac{47}{100}=940$，故 B 正确；平均数为 $400\times0.08+1200\times0.2+2000\times0.25+2800\times0.35+3600\times0.08+4400\times0.04=2216$（元），故 C 错误；中位数为$1600+\dfrac{22}{25}\times800=2304$（元），故 D 正确. 故选 ABD.

10. AB　两圆方程相减可得直线AB的方程为$2mx+2ny-m^2-n^2=0$，因为圆C_1的圆心为$C_1(0,0)$，半径为2，且公共弦AB的长为$2\sqrt{3}$，则$C_1(0,0)$到直线$2mx+2ny-m^2-n^2=0$的距离为1，所以 $\dfrac{m^2+n^2}{\sqrt{4(m^2+n^2)}}=1$，解得$m^2+n^2=4$，所以直线$AB$的方程为$mx+ny-2=0$，故 A，B 正确；由圆的性质可知直线$C_1C_2$垂直平分线段$AB$，所以$C_1(0,0)$到直线$2mx+2ny-m^2-n^2=0$的距离即为$AB$中点与点$C_1$的距离，设$AB$中点的坐标为$(x,y)$，则$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=1$，即$x^2+y^2=1$，故 C 错误；易得四边形$AC_1BC_2$为菱形，且$AB=2\sqrt{3}$，$C_1C_2=2$，则四边形$AC_1BC_2$的面积为 $\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2=2\sqrt{3}$，故 D 错误. 故选 AB.

11. AC　圆锥的母线长为$\sqrt{3+1}=2$，则圆锥的侧面积为$\pi rl=2\sqrt{3}\pi$，故 A 正确；

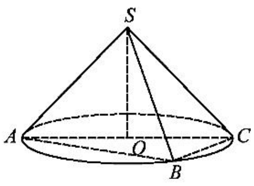
$\because \tan\angle SCA=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore \angle SCA=30^\circ$，$\therefore \angle ASC=120^\circ$，$\therefore 0^\circ<\angle ASB\leqslant120^\circ$，

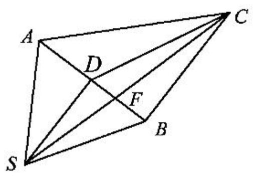
设$\angle ASB=\theta(0^\circ<\theta\leqslant120^\circ)$，则$S_{\triangle SAB}=\dfrac{1}{2}SA\cdot SB\sin\angle ASB=2\sin\theta\leqslant2$，故 B 不正确；当$B$是弧$AC$的中点时，直线$SB$与平面$SAC$所成角的最大，由$AC=2\sqrt{3}$知，此时$B$到平面$SAC$距离为$\sqrt{3}$，又因为高为$1$，所以直线$SB$与平面$SAC$所成角的最大值为$60^\circ$，故 C 正确；当$B$是弧$AC$的中点时，$AB=BC=\sqrt{6}$，此时$\triangle SAB$为等腰三角形，$\triangle ABC$为等腰直角三角形，将$\triangle SAB$、$\triangle ABC$沿$AB$展开至同一个平面，得到如图所示的平面图形，取$AB$的中点$D$，连接$SC,SD$，则$SD=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，$\therefore \sin\angle ABS=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$，

$\therefore \cos\angle CBS=\cos(90^\circ+\angle ABS)=-\sin\angle ABS=-\dfrac{\sqrt{10}}{4}$，

$\therefore SC^2=2^2+6-2\times2\times\sqrt{6}\times\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{4}\right)=10+2\sqrt{15}$，$\therefore (SF+FC)^2\geqslant SC^2=10+2\sqrt{15}$，

当且仅当S,F,C三点共线时等号成立，故 D 错误. 故选 AC.





12. ACD 由题意得，抛物线 $C:x^2=8y$. 设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，则 $x_1\neq x_2$，$x_1+x_2=8$，$y_1+y_2=12$，且 $\begin{cases}x_1^2=8y_1\\x_2^2=8y_2\end{cases}$，故 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=1$，故直线 l 的方程为 $y=x+2$，与抛物线 C 的方程联立整理得，$x^2-8x-16=0$，故 $x_1x_2=-16$. 由 $y'=\dfrac{1}{4}x$，得切线 $AP:y=\dfrac{1}{4}x_1x-\dfrac{1}{8}x_1^2$，切线 $AQ:y=\dfrac{1}{4}x_2x-\dfrac{1}{8}x_2^2$，联立切线方程可得，$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+x_2}{2}=4\\y=\dfrac{x_1x_2}{8}=-2\end{cases}$，故 $A(4,-2)$，而 $F(0,2)$，故 $|AF|=4\sqrt{2}$，故 A 正确；$|PQ|=y_1+y_2+4=16$，故 B 错误；因为 $k_{AF}\cdot k_l=(-1)\times1=-1$，所以 $PQ\perp AF$，故 C 正确；因为 $|AR|=8=\dfrac{1}{2}|PQ|$，所以 $AP\perp AQ$，故 D 正确.故选 ACD.

三、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.）

13. 945

令 $x=1$，则 $2^n=128$，解得 $n=7$，故 $\left(3x^2-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)^7$ 展开式的通项公式为

$T_{r+1}=C_7^r\cdot\left(3x^2\right)^{7-r}\cdot\left(-x^{-\frac{3}{4}}\right)^r=C_7^r\cdot3^{7-r}\cdot(-1)^r\cdot x^{14-\frac{11}{4}r}$，令 $14-\dfrac{11}{4}r=3$，解得 $r=4$，故展开式中 x^3 的系数为 $C_7^4\cdot3^3\cdot(-1)^4=35\times27=945$.

14. 196

被 3 除余 2 且被 5 除余 3 的数构成首项为 8，公差为 15 的等差数列，则 $a_n=8+15(n-1)=15n-7$，令 $15n-7\leqslant200$，解得 $n\leqslant13.8$，则数列 $\{a_n\}$ 的最大项为 $15\times13-7=188$，所以该数列最大项和最小项之和为 $188+8=196$.

15. $2\sqrt{15}$（3 分） $12+6\sqrt{3}$（2 分）

取 AB 的中点 M，则 $\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B}=2\overrightarrow{F_1M}$，$\because\left(\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\therefore2\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\therefore\overrightarrow{F_1M}\perp\overrightarrow{AB}$，$\therefore|AF_1|=|F_1B|$. 设 $|BF_2|=x$，由双曲线的定义得 $|AF_1|=|BF_1|=x+2a=x+6$，$|AF_2|=|AF_1|+2a=x+12$，$\therefore|AB|=12$. 在 $\triangle ABF_1$ 中，$\angle AF_1B=\dfrac{2\pi}{3}$，$|AF|=|F_1B|$，$|AB|=12$，$\therefore|F_1M|=2\sqrt{3},|F_1B|=4\sqrt{3}$，$\therefore x=4\sqrt{3}-6$. 在 $Rt\triangle F_1F_2M$ 中，$\left(2\sqrt{3}\right)^2+\left(4\sqrt{3}\right)^2=4c^2$，解得 $c=\sqrt{15}$，则双曲线 C 的焦距为 $2\sqrt{15}$. $\because|AF_2|=x+12=4\sqrt{3}+6$，$\therefore\triangle AF_1F_2$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}|AF_2|\cdot|F_1M|=\dfrac{1}{2}\times\left(4\sqrt{3}+6\right)\times2\sqrt{3}=12+6\sqrt{3}$.

16. $[1,+\infty)$

设 $f(x)=\ln x-ax-2a^2+3$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-a$. 当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a>0$ 恒成立，则函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$f\left(e^{-3}-2a\right)=\ln\left(e^{-3}-2a\right)+3-ae^{-3}\geqslant \ln e^{-3}+3-ae^{-3}=-ae^{-3}\geqslant 0$，不合题意，舍去；当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-a=\dfrac{1-ax}{x}=0$ 得 $x=\dfrac{1}{a}$. 当 $0<x<\dfrac{1}{a}$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>\dfrac{1}{a}$ 时，$f'(x)<0$，则函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减，

$\therefore f(x)_{\max}=f\left(\dfrac{1}{a}\right)=2-\ln a-2a^2$. 令 $g(a)=2-2a^2-\ln a$，易得 $g(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

$g(1)=0$，则 $g(a)\leqslant 0$ 的解集为 $[1,+\infty)$，即实数 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

四、解答题（本题共 6 小题，第 17 题 10 分，第 18~22 题每题 12 分，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17.（本小题满分 10 分）

（1）由题意得，$S_{n+1}-S_n+a_n=5\cdot 4^n$，即 $a_{n+1}+a_n=4^{n+1}+4^n$，……………………1 分

故 $a_{n+1}-4^{n+1}=-\left(a_n-4^n\right)$，即 $\dfrac{a_{n+1}-4^{n+1}}{a_n-4^n}=-1$，……………………3 分

又 $a_1-4=-1$，故数列 $\left\{a_n-4^n\right\}$ 是以 -1 为首项，-1 为公比的等比数列. ……………………4 分

（2）由（1）知，$a_n-4^n=(-1)^n$，即 $a_n=4^n+(-1)^n$. ……………………6 分

数列 $\left\{4^n\right\}$ 的前 n 项和为 $\dfrac{4\cdot\left(1-4^n\right)}{1-4}=\dfrac{4^{n+1}-4}{3}$，……………………7 分

数列 $\left\{(-1)^n\right\}$ 的前 n 项和为 $\dfrac{(-1)\left[1-(-1)^n\right]}{1-(-1)}=\dfrac{(-1)^n-1}{2}$，……………………8 分

故 $S_n=\dfrac{4^{n+1}-4}{3}+\dfrac{(-1)^n-1}{2}=\dfrac{4^{n+1}}{3}+\dfrac{(-1)^n}{2}-\dfrac{11}{6}$. ……………………10 分

注：也可以写成奇偶的形式

18.（本小题满分 12 分）

（1）设内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，

由 $\sin^2 A+3\sin^2 C=3\sin^2 B$ 及正弦定理知，$a^2+3c^2-3b^2=0$，……………………1 分

$\therefore 2a^2=3a^2+3c^2-3b^2$，$\therefore \cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{\frac{2a^2}{3}}{2ac}=\dfrac{a}{3c}=\dfrac{\sin A}{3\sin C}$，……………………3 分

$\therefore \sin A=3\sin C\cos B$，$\therefore \sin(B+C)=\sin B\cos C+\sin C\cos B=3\sin C\cos B$，

$\therefore \sin B\cos C=2\sin C\cos B$. ……………………4 分

$\because \sin B\cos C=\dfrac{2}{3}$，$\therefore \sin C\cos B=\dfrac{1}{3}$，$\therefore \sin(B+C)=1$，

$\therefore B+C=\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形. ……………………6 分

（2）由（1）知，$\sin B\cos C=2\sin C\cos B$，

$\because \cos B\neq 0,\cos C\neq 0$，$\therefore \tan B=2\tan C$，且 $\tan B>0,\tan C>0$，……………………8 分

$\therefore \tan(B-C)=\dfrac{\tan B-\tan C}{1+\tan B\cdot\tan C}=\dfrac{\tan C}{1+2\tan^2 C}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{\tan C}+2\tan C}\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1}{\tan C}\cdot 2\tan C}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

当且仅当$\dfrac{1}{\tan C}=2\tan C$，即$\tan C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时取等号，

$\therefore \tan(B-C)$的最大值为$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$． ……………………12分

19.（本小题满分12分）

（1）设A_1=“第一天选择‘抖音’平台”，B_1=“第一天选择‘快手’平台”，A_2=“第二天选择‘抖音’平台”，……………………1分

则$P(A_1)=0.6, P(B_1)=0.4, P(A_2|A_1)=0.6, P(A_2|B_1)=0.7$，……………………2分

则$P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(B_1)P(A_2|B_1)=0.6\times0.6+0.4\times0.7=0.64$．………………4分

（2）由题意得，X的取值为$0,1,2,3$，

且$P(X=0)=(1-p)(1-2p)(1-0.5)=p^2-\dfrac{3}{2}p+\dfrac{1}{2}$，……………（6分）

$P(X=1)=p(1-2p)(1-0.5)+(1-p)\cdot2p\cdot(1-0.5)+(1-p)(1-2p)\cdot0.5=\dfrac{1}{2}-p^2$，…（7分）

$P(X=2)=p\cdot2p\cdot(1-0.5)+(1-p)\cdot2p\cdot0.5+p\cdot(1-2p)\cdot0.5=\dfrac{3}{2}p-p^2$，

$P(X=3)=p\cdot2p\cdot0.5=p^2$，……………………8分

所以$E(X)=\dfrac{1}{2}-p^2+2\left(\dfrac{3}{2}p-p^2\right)+3p^2=0.5+3p=1.7$，解得$p=0.4$．……………………10分

故X的分布列为

X	0	1	2	3
P	0.06	0.34	0.44	0.16

……………………12分

注：本题也可先利用$E(X)=p+2p+0.5=0.5+3p=1.7$，解得$p=0.4$，再求分布列．

20.（本小题满分12分）

（1）如图，连接OE,OF，

因为三棱锥$E-ABD$和$F-BCD$均是棱长为2的正四面体，

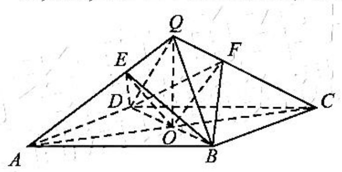
所以$AO=OC=OE=OF=\sqrt{3}, AE=FC=2$，

所以$\triangle AOE\cong\triangle COF$，所以$\angle EAO=\angle FCO$，所以$OQ\perp AC$．……………………2分

因为$BF=DF, QF=QF, \angle BFQ=\angle DFQ=\dfrac{2\pi}{3}$，

所以$\triangle BFQ\cong\triangle DFQ$，所以$BQ=DQ$，所以$OQ\perp BD$，……………………4分

又$AC\cap BD=O, AC,BD\subset$平面$ABCD$，所以$OQ\perp$平面$ABCD$．……………………5分



（2）易得四边形$ABCD$是菱形，则$AC\perp BD$，所以OQ,AC,BD两两垂直，所以以O为原点建立空间直角坐标系如图，

则 $A\left(0,-\sqrt{3},0\right),B\left(1,0,0\right),C\left(0,\sqrt{3},0\right),D\left(-1,0,0\right),Q\left(0,0,\sqrt{6}\right)$,

故 $\overrightarrow{AD}=\left(-1,\sqrt{3},0\right),\overrightarrow{DQ}=\left(1,0,\sqrt{6}\right),\overrightarrow{BC}=\left(-1,\sqrt{3},0\right),\overrightarrow{CQ}=\left(0,-\sqrt{3},\sqrt{6}\right)$. ……………………6 分

设平面 AQD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{m}=-x_1+\sqrt{3}y_1=0\\ \overrightarrow{DQ}\cdot\boldsymbol{m}=x_1+\sqrt{6}z_1=0\end{cases}$,

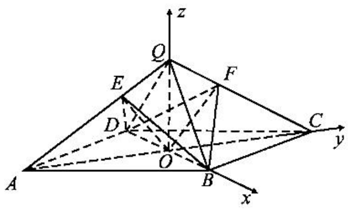
令 $x_1=\sqrt{6}$，则 $y_1=\sqrt{2},z_1=-1$，故 $\boldsymbol{m}=\left(\sqrt{6},\sqrt{2},-1\right)$. ……………………8 分

设平面 BCF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}=-x_2+\sqrt{3}y_2=0\\ \overrightarrow{CQ}\cdot\boldsymbol{n}=-\sqrt{3}y_2+\sqrt{6}z_2=0\end{cases}$,

令 $x_2=\sqrt{6}$，则 $y_2=\sqrt{2},z_2=1$，故 $\boldsymbol{n}=\left(\sqrt{6},\sqrt{2},1\right)$，……………………10 分

所以 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{6+2-1}{\sqrt{6+2+1}\times\sqrt{6+2+1}}=\dfrac{7}{9}$，……………………11 分

所以平面 ADQ 与平面 BCF 所成角的余弦值为 $\dfrac{7}{9}$. ……………………12 分



21.（本小题满分 12 分）

（1）设 $P\left(x_0,y_0\right)$，

则 $k_{PM_1}\cdot k_{PM_2}=\dfrac{y_0}{x_0+a}\cdot\dfrac{y_0}{x_0-a}=\dfrac{y_0^2}{x_0^2-a^2}=\dfrac{b^2\left(1-\dfrac{x_0^2}{a^2}\right)}{x_0^2-a^2}=-\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{3}{4}$，……………………2 分

故 $b^2=\dfrac{3}{4}a^2$ ①；又 $2b=2\sqrt{3}$ ②，……………………3 分

联立①②，解得 $a^2=4,b^2=3$，故 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ……………………4 分

（2）结论：点 Q 在定直线上 $x=4$. ……………………5 分

由（1）得，$M_1\left(-2,0\right)$，$M_2\left(2,0\right)$，设 $Q(x',y')$，

设直线 l 为 $x=my+1$，$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ x=my+1\end{cases}$,

整理得，$\left(3m^2+4\right)y^2+6my-9=0$，$\therefore y_1+y_2=\dfrac{-6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4}$，……………………6 分

直线 M_1A 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+2}\left(x+2\right)$，直线 M_2B 的方程为 $y=\dfrac{y_2}{x_2-2}\left(x-2\right)$，……………………7 分

联立两条直线方程，解得 $x'=2\cdot\dfrac{y_1\left(x_2-2\right)+y_2\left(x_1+2\right)}{y_2\left(x_1+2\right)-y_1\left(x_2-2\right)}$ ①，……………………8 分

将 $x_1=my_1+1$，$x_2=my_2+1$ 代入①，得 $x'=2\cdot\dfrac{2my_1y_2+3y_2-y_1}{y_1+3y_2}$　②，……………………9分

由 $y_1+y_2=\dfrac{-6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4}$ 得，$2my_1y_2=3(y_1+y_2)$，

代入②，得 $x'=2\cdot\dfrac{3(y_1+y_2)+3y_2-y_1}{y_1+3y_2}=\dfrac{4(y_1+3y_2)}{y_1+3y_2}=4$．

∴点 Q 在定直线上 $x=4$．　……………………12分

22.（本小题满分 12 分）

（1）$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{x-a}{x^2}$．

若 $a\leqslant 3$，则 $f'(x)\geqslant 0$，故函数 $f(x)$ 在 $[3,5]$ 上单调递增；　……………………2分

若 $3<a<5$，则当 $x\in[3,a)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(a,5]$ 时，$f'(x)>0$，

故函数 $f(x)$ 在 $[3,a)$ 上单调递减，在 $(a,5]$ 上单调递增；……………………3分

若 $a\geqslant 5$，则 $f'(x)\leqslant 0$，故函数 $f(x)$ 在 $[3,5]$ 上单调递减；

综上所述，若 $a\leqslant 3$，$f(x)$ 在 $[3,5]$ 上单调递增；若 $3<a<5$，$f(x)$ 在 $[3,a)$ 上单调递减，在 $(a,5]$ 上单调递增；若 $a\geqslant 5$，$f(x)$ 在 $[3,5]$ 上单调递减．……………………5分

（2）令 $f(x)=0$，则 $\ln x+\dfrac{1}{x}-2=0$，即 $x\ln x-2x+1=0$，

令 $g(x)=x\ln x-2x+1$，则 $g'(x)=\ln x-1$，

易得 $g(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递减，$(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递增，

又 $g(\mathrm{e})<0$，则 $0<m<\mathrm{e}<n$．　……………………6分

要证明 $m+n>2\mathrm{e}$，只要证明 $n>2\mathrm{e}-m$，又 $2\mathrm{e}-m>\mathrm{e}$，即证明 $g(n)>g(2\mathrm{e}-m)$，

因为 $g(m)=g(n)$，即证 $g(m)>g(2\mathrm{e}-m)$．

令 $h(x)=g(x)-g(2\mathrm{e}-x)$，$x\in(0,\mathrm{e})$，

则 $h'(x)=\ln x-2+\ln(2\mathrm{e}-x)=\ln(2\mathrm{e}x-x^2)-2=\ln\left[-(x-\mathrm{e})^2+\mathrm{e}^2\right]-2<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递减，所以 $h(x)>h(\mathrm{e})=0$，则 $g(m)>g(2\mathrm{e}-m)$，

则 $m+n>2\mathrm{e}$．……………………9分

因为 $\ln m<1$，$m\ln m<m$，所以 $m\ln m-2m<-m$，

又 $m\ln m-2m=n\ln n-2n$，所以 $m<2n-n\ln n$，　$m+n<3n-n\ln n$．

令 $t(x)=3x-x\ln x$，$x\in(\mathrm{e},+\infty)$，$t'(x)=2-\ln x$，

易得 $t(x)$ 在 $(\mathrm{e},\mathrm{e}^2)$ 上单调递增，在 $(\mathrm{e}^2,+\infty)$ 上单调递减，故 $m+n<t(x)_{\max}=t(\mathrm{e}^2)=\mathrm{e}^2$．

综上，$2\mathrm{e}<m+n<\mathrm{e}^2$．……………………12分

以上各解答题如有不同解法并且正确，请按相应步骤给分.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。