

成都七中(高新校区)高 2021 级高三上期入学考试

数 学(理科)

本试卷分选择题和非选择题两部分。第 I 卷(选择题) 1 至 2 页, 第 II 卷(非选择题) 3 至 4 页, 共 4 页。满分 150 分, 考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前, 务必将自己的姓名、考籍号填在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时, 必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦擦干净后, 再选涂其他答案标号。
3. 答非选择题时, 必须使用钢笔, 将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答, 在试题卷上答题无效。

第 I 卷(选择题, 共 60 分)

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $A = \{x \mid y = \sqrt[3]{\ln(x^2 - 1)}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$, 则 $\complement_{\mathbb{R}} A \cap B =$
(A) $[0, 1]$ (B) $\{2, 3, 4\}$ (C) $\{1\}$ (D) $\{0, 1\}$
2. 复数 $z = \frac{3+4i}{2+i}$, 则 $|z| =$
(A) $\sqrt{2}$ (B) 5 (C) $\sqrt{5}$ (D) 3
3. 若平面向量 a, b 满足 $a \cdot b = \frac{1}{2}$, $|a + b| = 2$. 则 $|a|^2 + |b|^2 =$
(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1
4. 若 $\cos \alpha - 2 = 5 \cos 2\alpha$, 则 $\cos \alpha =$
(A) $\pm \frac{1}{2}$ (B) $\pm \frac{3}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ 或 $-\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{3}{5}$ 或 $\frac{1}{2}$
5. 已知 $a, b > 0$, $a + 2b = 1$. 则 $\frac{1}{a} + \frac{a^2}{b^2}$ 的最小值为
(A) $\frac{8}{3}$ (B) 6 (C) $\frac{9}{2}$ (D) 4
6. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \frac{2^n + 1}{(2^{n-1} + 3)(2^n - 1)}$. 设 S_n 为 $\{a_n\}$ 前 n 项的和, 若 $S_n > 1$, 则 n 的最小值为
(A) 2 (B) 3 (C) 12 (D) 13

7. 通过斜截圆柱可得到一椭圆截面. 现将圆柱的侧面从任意处展开成长方形, 所得的椭圆截面的截线始终为平滑的曲线. 则该截线在展开图上的方程最可能为下列哪种曲线的一部分

(A) $y = x^2$ (B) $y = \cos x$ (C) $y = |x|$ (D) $y = e^{|x|}$

8. 在没有其他因素影响时, 飞机的航线往往选取的是两地之间的最短距离. 设地球为一半径为 R 的球体, 一架飞机将从 A 地东经 0° 飞至 B 地东经 120° , 且 A, B 两地纬度相同. 若飞机始终在地球球面上运动, 则该飞机飞行的最短路程为

(A) $\frac{\pi R}{3}$ (B) $\frac{\pi R}{2}$ (C) $\frac{2\pi R}{3}$ (D) $\frac{3\pi R}{4}$

9. 某地盛行糕点有 n 种, 该地的糕点店从中准备了 $m(m < n)$ 种糕点供顾客选购. 已知某顾客喜好的糕点有 $k(k < n)$ 种, 则当其随机进入一家糕点店时, 会发现该店中有若干种糕点符合其喜好. 记随机变量 X 为该顾客发现符合其喜好的糕点的种数, 则 $E(X) =$

(A) $\frac{km}{n}$ (B) $\frac{m+k}{n^2}$ (C) $\frac{kn}{m}$ (D) $\frac{m-k}{n}$

10. 若 $(x-1)(x+1)(x-a) \geq |x| - 1$ 在 $x \in [-1, 1]$ 时恒成立, 则 a 的取值范围为

(A) $a \geq 1$ (B) $a \geq \frac{1}{2}$ (C) $a \geq 0$ (D) $a \geq -1$

11. 定义: 若直线 l 将多边形分为两部分, 且使得多边形在 l 两侧的点 to 直线 l 的距离之和相等, 则称 l 为多边形的一条“等线”. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (a, b 为常数) 和其左右焦点 F_1, F_2 , P 为 C 上的一动点, 过 P 作 C 的切线分别交两条渐近线于点 A, B , 已知四边形 AF_1BF_2 与三角形 PF_1F_2 有相同的“等线” l . 则对于下列四个结论:

① $|PA| = |PB|$;

②等线 l 必过多边形的重心;

③ l 始终与 $\frac{3x^2}{a^2} - \frac{3y^2}{b^2} = 1$ 相切;

④ l 的斜率为定值且与 a, b 有关.

其中所有正确结论的编号是

(A) ①② (B) ①④ (C) ②③④ (D) ①②③

12. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 满足 $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2$. 设 $\triangle ABC$ 面积为 S , 外接圆半径为 R , 内切圆半径为 r . 记 $y = \frac{R^2}{S} + \frac{S}{r^2}$, 则当 $y \in \mathbb{Z}$ 时, $y =$

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

第II卷(非选择题, 共90分)

二、填空题: 本大题共4小题, 每小题5分, 共20分.

13. $(xy + x + y + 1)^4$ 的展开式中 xy^3 项的系数为_____ (用数字作答).
14. 《孙子算经》给出了“物不知数”问题, 原文如下: 有物不知其数, 三三数之剩二, 五五数之剩三, 七七数之剩二. 问物几何? 即一个正整数除以三余二, 除以五余三, 除以七余二, 则这个正整数的最小值为_____.
15. 定义 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 例如 $[2.1] = 2$, $[-1.2] = -2$. 则方程 $x^2 - 4[x] + 3 = 0$ 的解的个数为_____.
16. 集合 $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{0}\}$, 其中 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 为单位向量, 两两之间夹角为 120° . 现从 A 中任选一个向量, 选取 n 次, 并将所选取的向量合成为一个向量, 则最终得到的不同向量有_____个 (用含 n 的代数式表示).

三、解答题: 本题共6小题, 共70分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分12分)

已知正项等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $\cos(2\pi a_{n+1}) = 2\cos^2(\pi a_n) - 1$, 且 $a_1 \neq a_2$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的公差 d 的最小值;

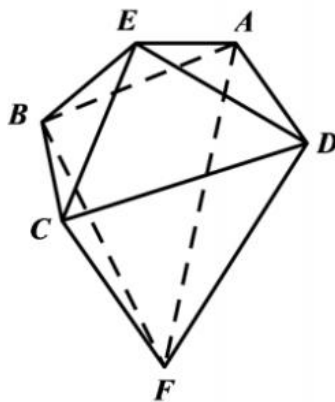
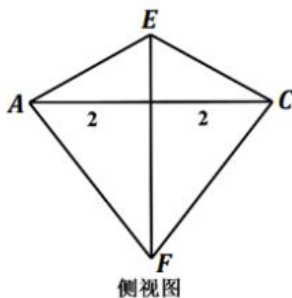
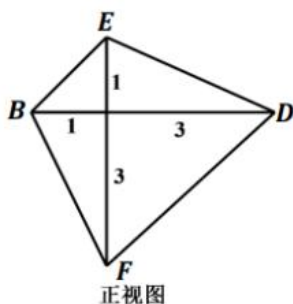
(II) 当 d 取最小值时, 若 a_1 也取最小值, 求 $\{a_n \cdot 2^n\}$ 前 n 项和 S_n .

18. (本小题满分12分)

现有如右图所示的八面体, 八面体的正视图和侧视图如左图所示.

(I) 证明: $DF \parallel$ 面 BEC ;

(II) 求二面角 $C-DE-F$ 的余弦值.



19. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = a \ln x + x - \frac{1}{x}$ 有三个零点 x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$).

(I) 求 a 的取值范围;

(II) 过点 $(x_1, 0)$ 与 $(x_3, 0)$ 分别作 $f(x)$ 的切线, 两切线交于 M 点. 求 M 点到 y 轴的距离.

20. (本小题满分 12 分)

已知 $C_1: \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{4-a} = 1 (0 < a < 4)$, $C_2: \frac{x^2}{b} + \frac{y^2}{4-b} = 1 (b > 4)$.

(I) 证明: $y = |x| - 2$ 总与 C_1 和 C_2 相切;

(II) 在 (I) 的条件下, 若 $y = |x| - 2$ 与 C_1 在 y 轴右侧相切于 A 点, 与 C_2 在 y 轴右侧相切于 B 点. 直线 l 与 C_1 和 C_2 分别交于 P, Q, M, N 四点. 是否存在定直线 l 使得对任意题中所给 a, b , 总有 $k_{AP} + k_{AQ} + k_{BP} + k_{BQ}$ 为定值? 若存在, 求出 l 的方程; 若不存在, 请说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

在三维空间中, 立方体的坐标可用三维坐标 (a_1, a_2, a_3) 表示, 其中 $a_i \in \{0, 1\} (1 \leq i \leq 3, i \in \mathbb{N})$. 而在 n 维空间中 ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$), 以单位长度为边长的“立方体”的顶点坐标可表示为 n 维坐标 $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$, 其中 $a_i \in \{0, 1\} (1 \leq i \leq n, i \in \mathbb{N})$. 现有如下定义: 在 n 维空间中两点间的曼哈顿距离为两点 $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ 与 $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ 坐标差的绝对值之和, 即为 $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + |a_3 - b_3| + \dots + |a_n - b_n|$. 回答下列问题:

(I) 求出 n 维“立方体”的顶点数;

(II) 在 n 维“立方体”中任取两个不同顶点, 记随机变量 X 为所取两点间的曼哈顿距离

① 求出 X 的分布列与期望;

② 证明: 在 n 足够大时, 随机变量 X 的方差小于 $0.25n^2$.

(已知对于正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, P 随 X 变化关系可表示为 $\varphi_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$)

请考生在第 22, 23 题中任选择一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分. 作答时, 用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目所对应的标号涂黑.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

已知极坐标系中极点与直角坐标原点均为 O , 曲线 $C: \rho = \frac{1}{\sqrt{2}-\cos\theta}$, $l: \theta = \frac{\pi}{3}$.

(I) 求 C 的直角坐标方程与 l 和 C 的交点到 O 的距离;

(II) 已知直线 $l_1: \theta = \theta_0$, $l_2: \theta = \theta_0 + \frac{2\pi}{3}$, $l_3: \theta = \theta_0 + \frac{4\pi}{3}$. 若 l_1, l_2, l_3 分别与 C 交于 P, Q, R 点, 求 $|OP| + |OQ| + |OR|$ 的最小值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知正实数 a, b, c, d .

(I) 证明: $\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \geq ac + bd$, 并确定取等条件.

(II) 证明: $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$, 并确定取等条件.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线