准考证号________

绝密★启用前

湘豫名校联考(2022年1月)

数学(文科)试卷

注意事项：

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。时间120分钟，满分150分。答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答第Ⅰ卷时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。

3. 回答第Ⅱ卷时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第Ⅰ卷(选择题　共60分)

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.

1. 已知集合 $M=\{-1,1\}$，$M\cap N=\{1\}$，$M\cup N=\{-1,0,1\}$，则集合 $N=$ (　　)

A. $\{-1\}$　　B. $\{0,-1\}$　　C. $\{0,1\}$　　D. $\{0\}$

2. 设 $\bar{z}$ 是复数 z 的共轭复数，若 $\frac{2}{i}=z+2$，则 $z=$ (　　)

A. $2-2i$　　B. $-2-2i$

C. $-2+2i$　　D. $2+2i$

3. 将正方形 $ABCD$ 沿着对角线 AC 折成一个直二面角，此时 $BD=2$，则边长 $AB=$ (　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 2

4. 已知 $a>0$，$b>0$，条件 p：$4a+b=ab$，条件 q：$a+b\geqslant 9$，则 p 是 q 的 (　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 已知 $A(-1,2)$，$B(3,5)$，则与直线 AB 平行且距离为2的直线方程为 (　　)

A. $3x-4y+21=0$　　B. $3x-4y-1=0$

C. $3x-4y+21=0$ 或 $3x-4y+1=0$　　D. $3x-4y-21=0$ 或 $3x-4y-1=0$

6. 已知实数 x,y 满足不等式组 $\begin{cases}x+y\geqslant 1,\\2x-y\leqslant 2,\\y\leqslant 2,\end{cases}$ 则目标函数 $z=x+2y$ 的最大值为 (　　)

A. 6　　B. 4　　C. 3　　D. 1

7. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 为单位向量，向量 $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}|$，则 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$ 的最小值为 （　　）

A. 15　　B. 0　　C. -2　　D. -20

8. 已知 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，$\sin 2\alpha=\frac{1}{3}$，则 $\sin\alpha+\cos\alpha=$ （　　）

A. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. $-\frac{\sqrt{6}}{3}$

9. 从区间 $(1,2)$ 中任取两个实数 x,y，则满足 $\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2\leqslant 1,\\(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 1\end{cases}$ 的概率为 （　　）

A. $\frac{\pi}{2}-1$　　B. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$　　C. $1-\frac{\pi}{4}$　　D. $2-\frac{\pi}{2}$

10. 函数 $f(x)=\frac{e^x-1}{1-(x+1)^2}-1$ 的零点个数为 （　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

11. 我国南宋著名数学家秦九韶发现了“三斜”求积公式，即△ABC 的三个内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，则△ABC 的面积 $S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]}$。已知在△$ABC$ 中，$a\cos B=8$，$b=2\sqrt{3}$，则△ABC 面积的最大值为 （　　）

A. $\sqrt{33}$　　B. $2\sqrt{33}$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D. $\sqrt{6}$

12. 已知函数 $f(x)=e^x-e^{-x}-2x$，若 $f(a-2\ln(|x|+1))+f\left(\frac{x^2}{2}\right)\geqslant 0$ 恒成立，则实数 a 的最小值为 （　　）

A. 0　　B. $2\ln 2-1$　　C. $2\ln 2-\frac{1}{2}$　　D. $\ln 2-\frac{1}{2}$

第Ⅱ卷（非选择题　共 90 分）

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$ 的中位数为 a，则 $2x_1-1,2x_2-1,2x_3-1,\cdots,2x_n-1$ 的中位数为________.

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2,x\geqslant 0,\\2x,x<0,\end{cases}$ 则 $f(f(1))=$________.

15. 已知三棱锥 $D-ABC$ 的底面 ABC 是正三角形，$AB=3$，$DA=DB=DC=2\sqrt{3}$，则三棱锥 $D-ABC$ 的外接球的表面积为________.

16. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，过点 $M(0,-b)$ 的直线 l 与双曲线 C 在第一象限切于点 A，F 为双曲线 C 的右焦点，若直线 AF 的斜率为 $\frac{\sqrt{14}}{2}$，则双曲线 C 的离心率 $e=$________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（本小题共 12 分）

身高体重指数(BMI)的大小直接关系到人的健康状况，某高中高三(1)班班主任为了解该班学生的身体健康状况，从该班学生中随机选取 5 名学生，测量其身高、体重(数据如下表)并进行线性回归分析，得到线性回归方程为 $\hat{y}=0.9x-90$，因为某些原因，3 号学生的体重数据丢失.

学生编号	1	2	3	4	5
身高 x/cm	165	170	175	170	170
体重 y/kg	58	62	Z	65	63

（Ⅰ）求表格中的 Z 值；

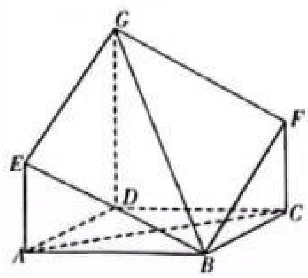
（Ⅱ）已知公式 $R^2=1-\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}$ 可以用来刻画回归的效果，请问学生的体重差异约有百分之多少是由身高引起的.（注：结果四舍五入取整数）

18.（本小题共 12 分）

如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，$DG\perp$平面 $ABCD$，$AE/\!/DG/\!/CF$，$AE=CF=\frac{1}{2}DG=1$.

（Ⅰ）证明：$BG\perp AC$；

（Ⅱ）若点 D 到平面 $BEGF$ 的距离为$\sqrt{2}$，求该几何体的体积.



19.（本小题共 12 分）

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=\frac{1}{2}$，$2S_n\cdot S_{n+1}=-a_{n+1}$，$b_n=(2^{S_n})^{-2}$，且数列$\{b_n\}$的前 n 项积为 T_n.

（Ⅰ）求 S_n；

（Ⅱ）证明：$\frac{1}{2}\leqslant T_n<1$.

20.（本小题共 12 分）

已知函数 $f(x)=e^x+ax$（$a\in\mathbf{R}$，e 为自然对数的底数）.

（Ⅰ）讨论函数 $f(x)$的单调性；

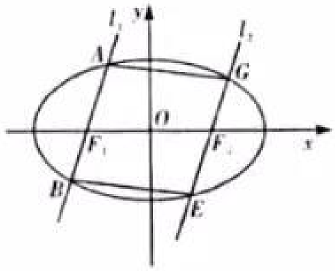
（Ⅱ）求函数 $f(x)$的极值的最大值.

21.(本小题共12分)

已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1(-1,0)$,$F_2(1,0)$,过点$F_1$的直线$l_1$交椭圆$C$于$A$,$B$两点.当直线$l_1$的斜率为1时,点$\left(-\frac{4}{7},\frac{3}{7}\right)$是线段$AB$的中点.

(Ⅰ)求椭圆C的标准方程;

(Ⅱ)如图,若过点F_2的直线l_2交椭圆C于E,G两点,且$l_1/\!/l_2$,求四边形$ABEG$的面积的最大值.



(二)选考题:共10分.请考生在第22—23题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.

22.(本小题共10分)选修4—4:坐标系与参数方程

设极坐标系的极点与平面直角坐标系的原点重合,极轴与x轴的非负半轴重合.已知曲线C_1:$\begin{cases}x=2+2\sqrt{2}\cos\alpha,\\y=2+2\sqrt{2}\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$为参数),曲线$C_2$:$\begin{cases}x=-1+t\cos\theta,\\y=-1+t\sin\theta\end{cases}$($t$为参数).

(Ⅰ)求曲线C_1的极坐标方程;

(Ⅱ)若曲线C_1与曲线C_2相切于点A,且点B的极坐标为$\left(\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}\right)$,求$|AB|$.

23.（本小题共10分）选修4—5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x+2|+|x-1|+x$.

（Ⅰ）求不等式 $f(x)\leq 5$ 的解集；

（Ⅱ）若不等式 $f(x)\geq mx$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，求实数 m 的取值范围.

湘豫名校联考(2022年1月)

数学(文科)参考答案

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	C	D	A	C	A	D	A	A	B	A	C

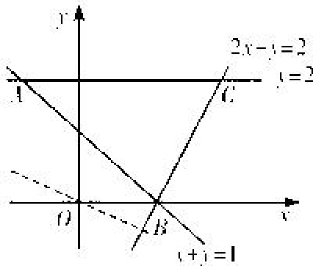
1. C 【解析】$\because M\cap N=\{1\}$,$\therefore 1\in N$. $\because M=\{-1,1\}$,$M\cup N=\{-1,0,1\}$,$\therefore 0\in N$. $\therefore N=\{0,1\}$. 故正确答案为C.

2. C 【解析】由 $\frac{2}{i}=\bar{z}+2$,得 $\bar{z}=\frac{2}{i}-2=-2-2i$,$z=-2-2i$. 故正确答案为C.

3. D 【解析】取 AC 的中点 O,连接 OB,OD,则 $\angle BOD=\frac{\pi}{2}$. $\because \triangle BOD$ 是等腰直角三角形,$OB=OD=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$,$\therefore\left(\frac{\sqrt{2}}{2}AB\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}AB\right)^2=4$,解得 $AB=2$. 故正确答案为D.

4. A 【解析】由 $4a+b=ab$,得 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=1$,$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)=5+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\geqslant 5+4=9$,当且仅当 $b=2a$,即 $a=3$,$b=6$ 时取等号,$\therefore p\Rightarrow q$,反之不成立,$\therefore p$ 是 q 的充分不必要条件. 故正确答案为A.

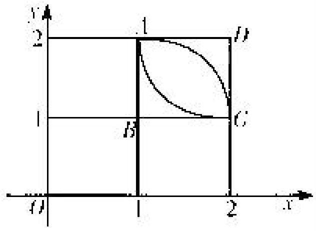
5. C 【解析】由题意得 $k_{AB}=\frac{5-2}{5-1}=\frac{3}{4}$,直线 AB 的方程为 $y-2=\frac{3}{4}(x-1)$,即 $3x-4y+11=0$,设所求直线的方程为 $3x-4y-m=0(m\neq 11)$,则 $\frac{|11-m|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$,解得 $m=1$ 或 $m=21$,$\therefore$ 所求直线的方程为 $3x-4y+1=0$ 或 $3x-4y-21=0$. 故正确答案为C.



6. A 【解析】不等式组所表示的可行域为如图所示的△ABC及其内部.
令 $z=0$,则 $y=-\frac{1}{2}x$,所表示的直线如图中虚线所示,平移该直线,
当经过点 $C(2,2)$ 时,z 取得最大值6. 故正确答案为A.

7. D 【解析】$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=2|\boldsymbol{a}|^2-3|\boldsymbol{b}|^2-5|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-10-10\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$,当 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=1$ 时,$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$ 取得最小值 -20. 故正确答案为D.

8. A 【解析】$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1-\sin 2\alpha=\frac{1}{3}$,$\because\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$,$\sin\alpha\cos\alpha>0$,$\therefore\alpha\in\left(\pi,\frac{5\pi}{2}\right)$,$\therefore\sin\alpha+\cos\alpha=-\sqrt{\frac{4}{3}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 故正确答案为A.



9. A 【解析】如图.
$S_{正方形ABCD}=1\times 1=1$,$S_{叶形}=2\times\frac{1}{4}\times\pi\times 1^2-2\times\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{\pi}{2}-1$,$\therefore$ 满足 $\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2\leqslant 1,\\(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 1\end{cases}$ 的概率为 $P=\frac{S_{叶形}}{S_{正方形ABCD}}=\frac{\pi}{2}-1$. 故正确答案为A.

10. B 【解析】令 $f(x)=0$,则 $e^x-1=1-(x-1)^2$,$x\neq 0$,且 $x\neq -2$. 令 $y_1=e^x-1$ $(x\neq 0$,且 $x\neq -2)$,$y_2=1-(x-1)^2(x\neq 0$,且 $x\neq -2)$,在同一平面直角坐标系中画出这两个函数的图象(图略),易得这两个函数的图象只有一个交点. 故正确答案为B.

11. A 【解析】∵ $ac\cos B=ac\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2}=8$，又∵ $b=2\sqrt{3}$，∴ $a^2+c^2=28$，

∴ $ac\leqslant\frac{a^2+c^2}{2}=14$（当且仅当 $a=c=\sqrt{14}$ 时取等号）.

∴ $S_{\triangle ABC}=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)^2\right]}=\sqrt{\frac{1}{4}(a^2c^2-8^2)}\leqslant\sqrt{\frac{1}{4}\times(14^2-8^2)}=\sqrt{33}$.

∴ △ABC 面积的最大值为 $\sqrt{33}$. 故正确答案为 A.

12. C 【解析】易知 $f(x)$ 是 **R** 上的奇函数，且 $f'(x)=e^x+e^{-x}-2\geqslant 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}-2=0$，当且仅当 $e^x=e^{-x}$，即 $x=0$ 时，等号成立.

所以 $f(x)$ 是 **R** 上的增函数.

$f(a-2\ln(|x|+1))+f\left(\frac{x^2}{2}\right)\geqslant 0$ 等价于 $f(a-2\ln(|x|+1))\geqslant -f\left(\frac{x^2}{2}\right)=f\left(-\frac{x^2}{2}\right)$，

所以 $a-2\ln(|x|+1)\geqslant-\frac{x^2}{2}$，即 $a\geqslant-\frac{x^2}{2}+2\ln(|x|+1)$.

令 $g(x)=-\frac{x^2}{2}+2\ln(|x|+1)$，则 $a\geqslant g(x)_{\max}$.

因为 $g(-x)=g(x)$ 且定义域为 **R**，

所以 $g(x)=-\frac{x^2}{2}+2\ln(|x|+1)$ 是 **R** 上的偶函数.

所以只需求 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最大值即可.

当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$g(x)=-\frac{x^2}{2}+2\ln(x+1)$，

$g'(x)=-x+\frac{2}{x+1}=\frac{-x^2-x+2}{x+1}=-\frac{(x+2)(x-1)}{x+1}$.

则当 $x\in[0,1)$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$.

所以 $g(x)$ 在 $[0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

所以当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$g(x)_{\max}=g(1)=2\ln 2-\frac{1}{2}$. 所以在定义域 **R** 上，$g(x)_{\max}=2\ln 2-\frac{1}{2}$，即 $a\geqslant 2\ln 2-\frac{1}{2}$. 故正确答案为 C.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $2a-1$ 【解析】∵ $2x_1-1,2x_2-1,2x_3-1,\cdots,2x_n-1$ 与 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$ 的中位数存在一样的线性关系，∴ $2x_1-1,2x_2-1,2x_3-1,\cdots,2x_n-1$ 的中位数为 $2a-1$. 故正确答案为 $2a-1$.

14. -2 【解析】$f(1)=-1^2=-1$，则 $f(f(1))=f(-1)=-2$. 故正确答案为 -2.

15. 16π 【解析】设△ABC 的重心为 O'，三棱锥 $D-ABC$ 的外接球的球心为 O，则 $O'B=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}=\sqrt{3}$，$O'D=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}=3$，设外接球的半径为 R，则 $(3-R)^2+(\sqrt{3})^2=R^2$，得 $R=2$. ∴ 外接球的表面积为 $4\pi\times2^2=16\pi$. 故正确答案为 16π.

16. $\frac{4\sqrt{2}}{5}$ 或 $2\sqrt{2}$ 【解析】设直线 l 的方程为 $y=kx-b(k>0)$，与双曲线方程联立，消去 y 并化简得 $(b^2-a^2k^2)x^2+2a^2bkx-2a^2b^2=0$. (*)

由题意得 $\Delta=4a^4b^2k^2+8a^2b^2(b^2-a^2k^2)=0$，即 $a^2k^2=2b^2$.

代入方程(*)并化简得 $x^2-2\sqrt{2}ax+2a^2=0$，所以 $x_A=\sqrt{2}a$，代入双曲线方程可得 $y_A=b$，即 $A(\sqrt{2}a,b)$，$F(c,0)$，依题意得 $\frac{b}{\sqrt{2}a-c}=\frac{\sqrt{14}}{2}$，即 $\frac{e^2-1}{2-2\sqrt{2}e+e^2}=\frac{7}{2}$，化简得 $5e^2-14\sqrt{2}e+16=0$，即 $(5e-4\sqrt{2})(e-2\sqrt{2})=$

0，解得 $e=\frac{4\sqrt{2}}{5}$ 或 $e=2\sqrt{2}$. 故正确答案为 $\frac{4\sqrt{2}}{5}$ 或 $2\sqrt{2}$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【解析】(Ⅰ) $\bar{x}=\frac{165+170+175+170+170}{5}=170$.

∵样本点的中心 $(\bar{x},\bar{y})$ 满足线性回归方程，

∴ $\bar{y}=0.9\times170-90=63$. ………………………………………………………………（3 分）

∴ $\frac{58+62+Z+65+63}{5}=63$.

解得 $Z=67$. ……………………………………………………………………………………（5 分）

(Ⅱ)

学生编号	1	2	3	4	5
身高 x/cm	165	170	175	170	170
体重 y/kg	58	62	67	65	63
残差 $\hat{e}$	-0.5	-1	-0.5	2	0

∴ $\sum_{i=1}^{5}(y_i-\hat{y}_i)^2=(-0.5)^2+(-1)^2+(-0.5)^2+2^2+0^2=5.5$.

$\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2=(-5)^2+(-1)^2+4^2+2^2+0^2=46$. ……………………………………………（9 分）

∴ $R^2=1-\frac{\sum_{i=1}^{5}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2}=1-\frac{5.5}{46}\approx0.88$.

∴学生的体重差异约有 88% 是由身高引起的. ……………………………………………（12 分）

18.【解析】(Ⅰ)连接 BD.

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $BD\perp AC$.

∵ $DG\perp$ 平面 $ABCD$，

又 $AC\subset$ 平面 $ABCD$，∴ $DG\perp AC$.

又 $BD\cap DG=D$，

∴ $AC\perp$ 平面 BDG.

又 $BG\subset$ 平面 BDG，∴ $BG\perp AC$. ……………………………………………………（6 分）

(Ⅱ)连接 EF，∵ $AE//CF$，且 $AE=CF$，∴四边形 $ACFE$ 是平行四边形，∴ $AC//EF$. 由(Ⅰ)可知 $AC\perp$ 平面 BDG.

∴ $EF\perp$ 平面 BDG.

∴平面 $BDG\perp$ 平面 $BEGF$.

过点 D 作 BG 的垂线 DH，交 BG 于 H，则 DH 为点 D 到平面 $BEGF$ 的距离.

设 $AB=x$，则 $BD=\sqrt{2}x$，$BG=\sqrt{2x^2+4}$，

根据等积思想得 $DH=\frac{2\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2+4}}=\sqrt{2}$，

解得 $x=\sqrt{2}$. ………………………………………………………………………………（9 分）

将该几何体补成正四棱柱 $ABCD-E_1B_1F_1G$.

则 $V_{正四棱柱ABCD-E_1B_1F_1G}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times2=4$.

故所给几何体的体积为 $V=\frac{1}{2}\cdot V_{正四棱柱ABCD-E_1B_1F_1G}=2$. ………………………………（12 分）

19.【解析】(Ⅰ) ∵ $2S_n\cdot S_{n+1}=-a_{n+1}=S_n-S_{n+1}$，

∴ $\frac{1}{S_{n+1}}-\frac{1}{S_n}=2$.

∴ $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$是等差数列，且首项$\frac{1}{S_1}=\frac{1}{a_1}=2$，公差为 2.

∴ $\frac{1}{S_n}=2+2(n-1)=2n$.

∴ $S_n=\frac{1}{2n}$. ……………………………………………………………………………… (5 分)

(Ⅱ) 当 $n\geqslant 2$，$n\in \mathbf{N}^*$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2(n-1)}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$.

∵ $a_1=\frac{1}{2}$，∴ $b_1=\frac{1}{2}$. ∴ $b_n=\begin{cases}\frac{1}{2}, n=1,\\ 2^{\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}}, n\geqslant 2.\end{cases}$ ……………………………………………… (8 分)

∴ 当 $n\geqslant 2$ 时，$T_n=\frac{1}{2}\cdot 2^{1-\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}\cdot\cdots\cdot 2^{\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}}=$

$2^{-1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)}=2^{-\frac{1}{n}}$.

又当 $n=1$ 时，$T_1=\frac{1}{2}$，∴ $T_n=2^{-\frac{1}{n}}$，$n\in \mathbf{N}^*$. ……………………………………… (10 分)

∵ $n\in \mathbf{N}^*$，∴ $\frac{1}{2}\leqslant 2^{-\frac{1}{n}}<1$.

即 $\frac{1}{2}\leqslant T_n<1$. …………………………………………………………………………… (12 分)

20.【解析】(Ⅰ) $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

$f'(x)=e^x+a$.

当 $a\geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$.

∴ $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增. ……………………………………………………… (2 分)

当 $a<0$ 时，

令 $f'(x)=0$，得 $x=\ln(-a)$.

当 $x\in(-\infty,\ln(-a))$时，$f'(x)<0$；当 $x\in(\ln(-a),+\infty)$时，$f'(x)>0$.

∴ $f(x)$在$(-\infty,\ln(-a))$上单调递减，在$(\ln(-a),+\infty)$上单调递增.

综上，当 $a\geqslant 0$ 时，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增；

当 $a<0$ 时，$f(x)$在$(-\infty,\ln(-a))$上单调递减，在$(\ln(-a),+\infty)$上单调递增. ………………… (6 分)

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知当 $a\geqslant 0$ 时，$f(x)$无极值；当 $a<0$ 时，$f(x)$有极小值，且极小值为 $f(\ln(-a))=e^{\ln(-a)}+a\ln(-a)=-a+a\ln(-a)$，无极大值. ……………………………………………………… (8 分)

设 $g(x)=x-x\ln x$，$x>0$，则

$g'(x)=-\ln x$.

令 $g'(x)=0$，得 $x=1$.

当 $x\in(0,1)$时，$g'(x)>0$，当 $x\in(1,+\infty)$时，$g'(x)<0$.

∴ $g(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减.

∴ $g(x)$的最大值为 $g(1)=1-\ln 1=1$.

∴ $f(x)$的极小值的最大值为 1. ……………………………………………………………… (12 分)

21.【解析】设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

(Ⅰ) 由题意可得$\begin{cases}b^2x_1^2-a^2y_1^2-a^2b^2=0,\\ b^2x_2^2-a^2y_2^2-a^2b^2=0.\end{cases}$

$\therefore \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{-4}{3}$.

依题意得 $\dfrac{4b^2}{3a^2}=1$. ……………………………………………………………………（3 分）

$\therefore \dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{3}{4}$.

$\because a^2-b^2=1$.

$\therefore a^2=4, b^2=3$.

$\therefore$ 椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）根据对称性知 $|AB|=|EG|$，$AB\parallel EG$.

$\therefore$ 四边形 $ABEG$ 是平行四边形.

又 $S_{四边形ABEG}=2S_{\triangle F_2AB}$.

$\therefore$ 问题可转化为求 $S_{\triangle F_2AB}$ 的最大值. ……………………………………………………（7 分）

设直线 l_1 的方程为 $x=my-1$，代入 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，得

$(3m^2+4)y^2-6my-9=0$.

则 $y_1+y_2=\dfrac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4}$.

$\therefore S_{\triangle F_2AB}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{\left(\dfrac{6m}{3m^2+4}\right)^2-4\cdot\dfrac{-9}{3m^2+4}}=\dfrac{12\sqrt{1+m^2}}{3m^2+4}$.

……………………………………………………………………………………………（9 分）

令 $\sqrt{1+m^2}=t$，则 $t\geqslant 1$，且 $m^2=t^2-1$.

$\therefore S_{\triangle F_2AB}=\dfrac{12t}{3t^2+1}=\dfrac{12}{3t+\dfrac{1}{t}}$. 记 $h(t)=3t+\dfrac{1}{t}$ $(t\geqslant 1)$，易知 $h(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增.

$\therefore h(t)_{\min}=h(1)=4$. $\therefore S_{\triangle F_2AB}=\dfrac{12}{3t+\dfrac{1}{t}}\leqslant\dfrac{12}{4}=3$.

$\therefore$ 四边形 $ABEG$ 的面积的最大值是 6. ……………………………………………………（12 分）

22.【解析】（Ⅰ）曲线 C_1 的直角坐标方程为 $(x-2)^2+(y-2)^2=8$，即 $x^2+y^2-4x-4y=0$，其极坐标方程为 $\rho^2-4\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta=0$，即 $\rho=4\cos\theta+4\sin\theta$. ……………………………………（4 分）

（Ⅱ）$\because \begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\dfrac{5\pi}{4}=-1, \\ y=\sqrt{2}\sin\dfrac{5\pi}{4}=-1, \end{cases}$ $\therefore$ 点 B 的直角坐标为 $(-1,-1)$，且曲线 C_2 恒过点 $B(-1,-1)$. ……（5 分）

将曲线 C_2 的方程代入 $(x-2)^2+(y-2)^2=8$，得 $(-3+t\cos\theta)^2+(-3+t\sin\theta)^2=8$，化简得 $t^2-(6\cos\theta+6\sin\theta)t+10=0$. ……………………………………………………………………（7 分）

令 $\Delta=(6\cos\theta+6\sin\theta)^2-40=0$，则

$6\cos\theta+6\sin\theta=\pm 2\sqrt{10}$，$\therefore t^2\pm 2\sqrt{10}t+10=0$，即 $(t\pm\sqrt{10})^2=0$.

解得 $t=\sqrt{10}$ 或 $t=-\sqrt{10}$.

$\therefore |AB|=|t|=\sqrt{10}$. ……………………………………………………………………（10 分）

23.【解析】（Ⅰ）当 $x\leqslant -2$ 时，

$f(x)=-x-2-x+1+x=-x-1$.

由 $-x-1\leqslant 5$，得 $x\geqslant -6$.

$\therefore$ 不等式的解集为 $[-6,-2]$； ……………………………………………………（1 分）

当 $-2<x<1$ 时，

$f(x)=x+2-x+1-x=x+3$，

由 $x-3\leqslant 5$，得 $x\leqslant 2$.

$\therefore$ 不等式的解集为 $(-2,1)$；……………………………………………………（2 分）

当 $x\geqslant 1$ 时，

$f(x)=x+2-x-1-x=3x+1$，

由 $3x-1\leqslant 5$，得 $x\leqslant \frac{4}{3}$，

$\therefore$ 不等式的解集为 $\left[1,\frac{4}{3}\right]$.

综上，原不等式的解集为 $\left[-6,\frac{4}{3}\right]$. ……………………………………………………（4 分）

（Ⅱ）解法一　原不等式可化为 $|x-2|-|x-1|\geqslant (m-1)x$.

当 $x\leqslant -2$ 时，$-x-2-x+1\geqslant (m-1)x$，即 $m-1\geqslant -2-\frac{1}{x}$，

$\because$ 上式恒成立，$\therefore m-1\geqslant -2+\frac{1}{2}$，即 $m\geqslant -\frac{1}{2}$. ……………………………………………………（6 分）

当 $-2<x<1$ 时，$x-2-x+1\geqslant (m-1)x$，即 $3\geqslant (m-1)x$.

$\because$ 上式恒成立，$\therefore \begin{cases}3\geqslant m-1,\\ 3\geqslant 2-2m,\end{cases}$ $\therefore -\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant 1$. ……………………………………………………（8 分）

当 $x\geqslant 1$ 时，$x-2+x-1\geqslant (m-1)x$，即 $m-1\leqslant 2-\frac{1}{x}$.

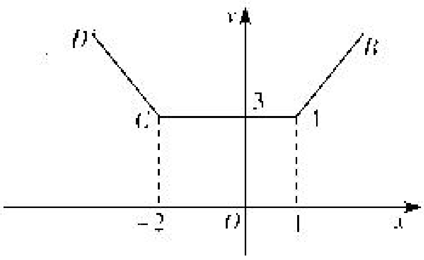
$\because$ 上式恒成立，$\therefore m-1\leqslant 2$，即 $m\leqslant 3$.

综上所述，实数 m 的取值范围为 $\left[-\frac{1}{2},3\right]$. ……………………………………………………（10 分）

解法二　原不等式可化为 $|x-2|-|x-1|\geqslant (m-1)x$.

设 $g(x)=|x+2|+|x-1|$，$h(x)=(m-1)x$.

函数 $g(x)$ 的大致图象如图所示：



$\because k_{OA}=\frac{3-0}{1-0}=3$，$k_{AB}=2$，$k_{OC}=\frac{3-0}{-2-0}=-\frac{3}{2}$，$k_{CD}=-2$.

$\therefore k_{OA}>k_{AB}$，且 $k_{OC}>k_{CD}$. ……………………………………………（7 分）

要使 $g(x)\geqslant h(x)$，则 $\begin{cases}m-1\geqslant 0,\\ m-1\leqslant 2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m-1<0,\\ m-1\geqslant -\frac{3}{2}.\end{cases}$

解得 $1\leqslant m\leqslant 3$ 或 $-\frac{1}{2}\leqslant m<1$.

$\therefore$ 实数 m 的取值范围为 $\left[-\frac{1}{2},3\right]$. ……………………………………………………（10 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。