江西省重点中学盟校 2023 届高三第二次联考

数学（理）试题

命题：九江市同文中学 陈劲　　赣州三中 朱同亮　　临川二中 王晶

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\{x|x^2<4\}$，$B=\{x|\log_2(x+1)<2\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$(-2,3)$　　B．$(-2,2)$　　C．$(-1,2)$　　D．$(0,3)$

2．已知复数 $z=1+\mathrm{i}$，$\bar{z}$ 是 z 的共轭复数,则 $\dfrac{1}{z\cdot\bar{z}-z}=$（　　）

A．$1+\mathrm{i}$　　B．$\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{i}}{2}$　　C．$1-\mathrm{i}$　　D．$\dfrac{1}{2}-\dfrac{\mathrm{i}}{2}$

3．设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_3=3$，$S_7=14$，则公差 $d=$（　　）

A．-1　　B．$-\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．1

4．若实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} y+1\ge 0 \\ 2x+y-4\le 0 \\ x-2y+3\ge 0 \end{cases}$，则 $z=3y-x$ 的最大值为（　　）

A．$-\dfrac{1}{2}$　　B．2　　C．5　　D．8

5．“$a=1$”是“函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+ax)$ 为奇函数”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

6．双曲线 $C:\dfrac{x^2}{m}-\dfrac{y^2}{m^2-m+4}=1(m>0)$ 的离心率最小时，双曲线 C 的渐近线方程为（　　）

A．$x\pm 2y=0$　　B．$2x\pm y=0$　　C．$\sqrt{3}x\pm y=0$　　D．$x\pm\sqrt{3}y=0$

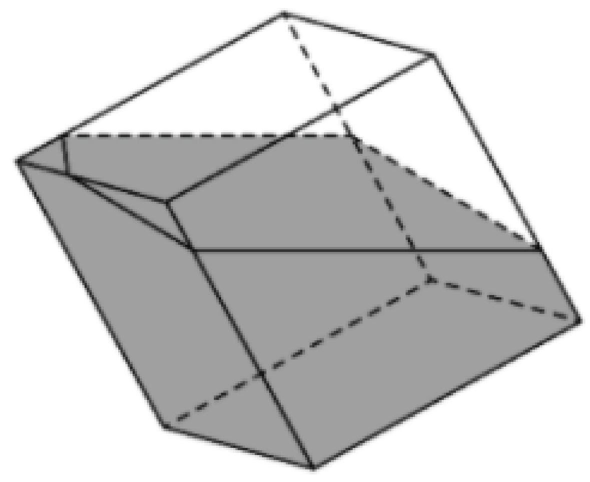
7．将函数 $f(x)=\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})+\cos^2x-\sin^2x$ 的图象向右平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象．函数 $g(x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取得极值，则 φ 的最小值为（　　）

A．$\dfrac{\pi}{6}$　　B．$\dfrac{\pi}{4}$　　C．$\dfrac{\pi}{3}$　　D．$\dfrac{5\pi}{12}$

8．设函数 $f(x)=a^2x+\dfrac{1}{x-1}+1(x>1)$，在区间 $(0,2)$ 随机抽取两个实数分别记为 a,b，则 $f(x)>b^2$ 恒成立的概率是（　　）

A．$\dfrac{1}{8}$　　　　B．$\dfrac{1}{4}$　　　　C．$\dfrac{3}{4}$　　　　D．$\dfrac{7}{8}$

9．如图，一个棱长1分米的正方体型封闭容器中盛有V升的水，若将该容器任意放置均不能使水平面呈三角形，则V的取值范围是（　　）



A．$(\dfrac{1}{6},\dfrac{5}{6})$　　　B．$(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3})$　　　C．$(\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3})$　　　D．$(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{2})$

10．已知斜率为k的直线l过抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点，且与抛物线C交于A,B两点，抛物线C的准线上一点$M(-1,-1)$满足$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$，则$|AB|=$（　　）

A．$3\sqrt{2}$　　　B．$4\sqrt{2}$　　　C．5　　　D．6

11．若$a=\ln(1+\mathrm{e}),b=\dfrac{1}{\mathrm{e}}+1,c=\sqrt{\mathrm{e}}$，则（　　）

A．$a>b>c$　　　B．$c>b>a$　　　C．$c>a>b$　　　D．$b>a>c$

12．伯努利双纽线（简称双纽线）是瑞士数学家伯努利（1654～1705）在1694年提出的。伯努利将椭圆的定义作了类比处理，指出到两个定点距离之积的点的轨迹是双纽线；曲线的形状类似打横的阿拉伯数字8，或者无穷大的符号∞．在平面直角坐标系xOy中，

到定点$A(-a,0),B(a,0)$的距离之积为$a^2(a>0)$的点的轨迹C就是伯努利双纽线，若

点$P(x_0,y_0)$是轨迹C上一点，则下列说法正确的是（　　）

①曲线C关于原点中心对称；　　　　② $x_0\in[-2a,2a]$；

③直线$y=x$与曲线C只有一个交点；　④曲线C上不存在点P，使得$|PA|=|PB|$．

A．①②　　　B．①③　　　C．②④　　　D．③④

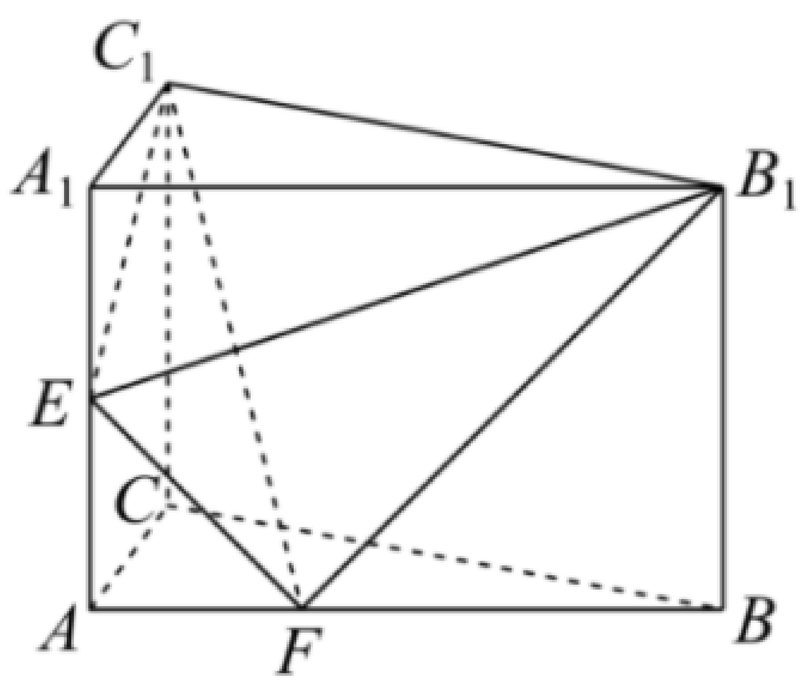
二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13．已知向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为$\dfrac{5\pi}{6}$，且$|\vec{a}|=\sqrt{3},|\vec{b}|=2$，则$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=$__________．

14．已知函数$f(x)=\begin{cases}(x+1)^5,x>1,\\x^2+2,x\le1,\end{cases}$则当$0<x<1$时，$f(f(x))$的展开式中$x^4$的系数为__________．

15．某软件研发公司对某软件进行升级，主要是软件程序中的某序列$A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}$重新编辑，编辑新序列为$A^*=\left\{\dfrac{a_2}{a_1},\dfrac{a_3}{a_2},\dfrac{a_4}{a_3},\cdots\right\}$，它的第$n$项为$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，若序列$\left(A^*\right)^*$的所有项都是2，且$a_4=1$，$a_5=32$，则$a_1=$___________．

16．如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC\perp BC, AC=1, AA_1=2, AB=3$，点 E,F 分别是棱 AA_1, AB 上的动点，当 $C_1E+EF+FB_1$ 最小时，三棱锥 B_1-C_1EF 外接球的表面积为______．



三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22，23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17．已知 ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，ΔABC 的面积为 S，$a^2+b^2-c^2=2S$．

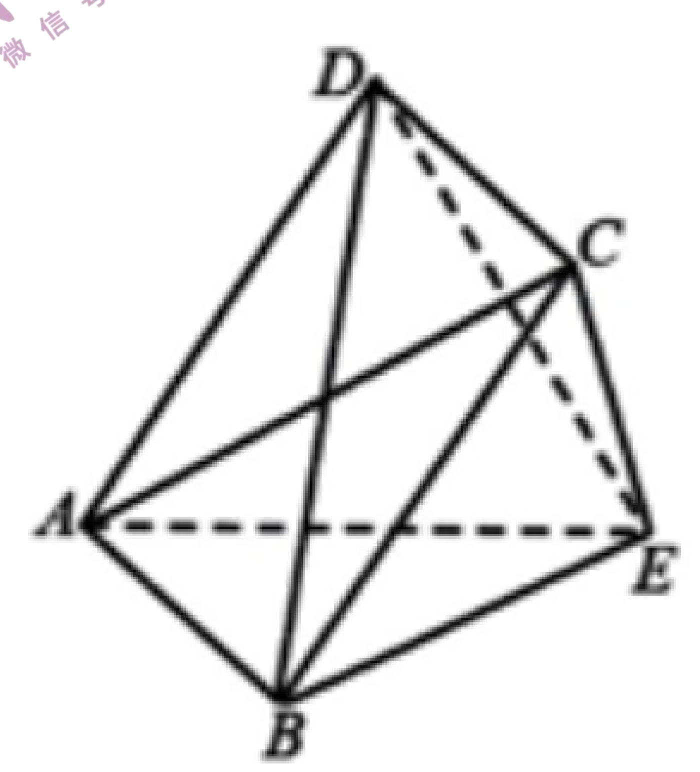
（1）求 $\cos C$；

（2）若 $a\cos B+b\sin A=c$，$a=\sqrt{5}$，求 b．

18．如图，四棱锥 $E-ABCD$ 中，除 EC 以外的其余各棱长均为 2．

（1）证明：平面 $BDE\perp$ 平面 ACE；

（2）若平面 $ADE\perp$ 平面 ABE，求直线 DE 与平面 BCE 所成角的正弦值．



19．文具盒里装有 7 支规格一致的圆珠笔，其中 4 支黑笔，3 支红笔．某学校甲、乙、丙三位教师共需取出 3 支红笔批阅试卷，每次从文具盒中随机取出一支笔，若取出的是红笔，则不放回；若取出的是黑笔，则放回文具盒，继续抽取，直至将 3 支红笔全部抽出．

（1）在第 2 次取出黑笔的前提下，求第 1 次取出红笔的概率；

（2）抽取 3 次后，记取出红笔的数量为 X，求随机变量 X 的分布列；

(3) 因学校临时工作安排，甲教师不再参与阅卷，记恰好在第 n 次抽取中抽出第 2 支红笔的概率为 P_n，求 P_n 的通项公式．

20．设 A,B,C 为椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 上的三点，且点 A,C 关于原点对称，$k_{AB}\cdot k_{BC}=-\dfrac{1}{2}$.

（1）求椭圆 E 的方程；

(2) 若点 B 关于原点的对称点为 D，且 $k_{AC}\cdot k_{BD}=-\dfrac{1}{2}$，证明：四边形 $ABCD$ 的面积为定值.

21．已知函数 $f(x)=ax(\ln x-2)-e^{1-x}$.

（1）当 $a=-1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（2）若 $f(x)$ 存在最小值 m，且 $m+3a\leqslant 0$，求 a 的取值范围.

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22，23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分．

22．[选修 4-4：坐标系与参数方程]

已知在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}t\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点为极点，x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\cos\theta-2=0$，点 P 的极坐标是 $(\dfrac{2\sqrt{15}}{3},\dfrac{2\pi}{3})$.

（1）求直线 l 的极坐标方程及点 P 到直线 l 的距离；

（2）若直线 l 与曲线 C 交于 M,N 两点，求 $\triangle PMN$ 的面积.

23．[选修 4-5：不等式选讲]

已知函数 $f(x)=|mx+1|+|2x-1|, m\in \mathrm{R}$.

（1）当 $m=3$ 时，求不等式 $f(x)>4$ 的解集；

（2）若 $0<m<2$，且对任意 $x\in R$，$f(x)\geq\dfrac{3}{2m}$ 恒成立，求 m 的最小值.