数学参考答案及评分细则

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	C	B	C	B	C	C	AC	AC	BD	BCD

1.B　**解析:**集合 $A=\{1,2\}$，$\complement_{R}B=\{x\mid -1<x<2\}$，所以 $A\cap(\complement_{R}B)=\{1\}$，故选 B.

[命题意图] 本题考查知识点为集合的交、补集运算，考查了学生的数学运算素养.

2.D　**解析:**设 $z=a+bi$，所以 $z^2+2z+2=0\Rightarrow a^2-b^2+2abi+2a+2bi+2=0$，所以

$\begin{cases}a^2-b^2+2a+2=0,\\2ab+2b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=\pm1,\\a=-1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b=0,\\a\text{ 无解},\end{cases}$ 所以 $z=-1\pm i$，故选 D.

[命题意图] 本题考查知识点为复数的运算及几何意义，考查了学生的数学运算素养.

3.C　**解析:**$a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n\Rightarrow a_nq^2=4a_nq-3a_n\Rightarrow q^2-4q+3=0\Rightarrow q=3$，所以 $a_n=3^{n-1}$，所以 $S_5=121$，故选 C.

[命题意图] 本题考查知识点为等比数列基本量运算，考查了学生的逻辑推理和数学运算素养.

4.B　**解析:**$\cos 2\theta+\cos\theta=0\Rightarrow 2\cos^2\theta+\cos\theta-1=0\Rightarrow(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)=0$，所以 $\cos\theta=\frac{1}{2}$，或 $\cos\theta=-1$，因为 $\theta\in(0,\pi)$，所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$，故选 B.

[命题意图] 本题考查知识点为二倍角公式，考查了学生的数学运算素养.

5.C　**解析:**$(x^2-x+y)^5$ 的展开式中 x^5y^2 的系数为 $C_5^2(x^2)^2\times C_3^1(-x)^1\times C_2^2y^2=-30x^5y^2$，故选 C.

[命题意图] 本题考查知识点为二项展开式的特定项系数，考查了学生的逻辑推理素养.

6.B　**解析:**B,P,F 三点共线，可得 $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}+(1-k)\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(1-k)\overrightarrow{AC}$，$A,P,E$ 三点共线，

可得 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AE}=m\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}m\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}m\overrightarrow{AB}$，所以 $\begin{cases}k=\frac{2}{3}m,\\\frac{1}{2}(1-k)=\frac{1}{3}m\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=\frac{1}{2},\\m=\frac{3}{4},\end{cases}$ 可得

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，则 $\lambda-\mu=\frac{1}{4}$，故选 B.

[命题意图] 本题考查知识点为平面向量基本定理，考查了学生的逻辑推理和数学运算素养.

7. C **解析**:因为 OP 为 $\angle APF_2$ 的平分线,所以 $\angle APO=\angle F_2PO$,又因为 $|OP|=|OF_2|=c$,所以 $\angle OF_2P=\angle F_2PO$,点 P 在渐近线 $y=-\frac{b}{a}x$ 上,$|OP|=c$,所以点 P 的坐标为 $(-a,b)$,所以 $\angle PAF_2=\frac{\pi}{2}$,所以 $\angle PAF_2+3\angle APO=\pi\Rightarrow\angle APO=\frac{\pi}{6}$,所以 $\angle POA=\frac{\pi}{3}$,所以 $-\frac{b}{a}=\tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}\Rightarrow\frac{b}{a}=\sqrt{3}$,可得 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=2$,故选 C.

[命题意图] 本题考查知识点为双曲线的几何性质,考查了学生的逻辑推理和数学运算素养.

8. C **解析**:根据题意可知,直线 $y=kx+b$ 与曲线 $y=e^x+2$ 和曲线 $y=\ln(e^2x)$ 都相切,所以对于曲线 $y=e^x+2$,$y'=e^x=k$,$x=\ln k$,切点 $A(\ln k,k+2)$,对于曲线 $y=\ln(e^2x)$,$y'=\frac{1}{x}=k(x>0)$,$x=\frac{1}{k}$,切点 $B\left(\frac{1}{k},\ln\frac{1}{k}+2\right)(k>0)$,因为公切线过 A,B 两点,所以 $k=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{k-\ln\frac{1}{k}}{\ln k-\frac{1}{k}}=\frac{k+\ln k}{\ln k-\frac{1}{k}}$,进而可得 $k\ln k-\ln k-k-1=0$,令 $g(k)=k\ln k-\ln k-k-1\ (k>0)$,$g'(k)=\ln k-\frac{1}{k}\ (k>0)$. 因为 $g'(k)$ 单调递增,且 $g'(1)=-1<0$,$g'(e)=1-\frac{1}{e}>0$,所以存在 k_0 使得 $\ln k_0-\frac{1}{k_0}=0$,即 $\ln k_0=\frac{1}{k_0}$,所以 $g(k)$ 在 $(0,k_0)$ 上单调递减,在 $(k_0,+\infty)$ 上单调递增,$k_0\in(1,e)$,故 $g(k)_{\min}=g(k_0)=k_0\ln k_0-\ln k_0-k_0-1$. 又因为 $\ln k_0=\frac{1}{k_0}$,$g(k)_{\min}=k_0\cdot\frac{1}{k_0}-\frac{1}{k_0}-k_0-1=-\frac{1}{k_0}-k_0<0$,当 $k=e^2$ 时,$g(k)=g(e^2)=e^2\ln e^2-\ln e^2-e^2-1=e^2-3>0$,因为 $k_0\in(1,e)$,$g(k_0)g(e^2)<0$,所以在 (k_0,e^2) 内存在 k_1,使得 $g(k_1)=0$. 当 $k=\frac{1}{e^2}$ 时,$g(k)=g\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{1}{e^2}\ln\frac{1}{e^2}-\ln\frac{1}{e^2}-\frac{1}{e^2}-1=-\frac{3}{e^2}+1>0$,因为 $k_0\in(1,e)$,$g(k_0)g\left(\frac{1}{e^2}\right)<0$,所以在 $\left(\frac{1}{e^2},k_0\right)$ 内存在 k_2,使得 $g(k_2)=0$. 综上所述,存在两条斜率分别为 k_1,k_2 的直线与曲线 $y=e^x+2$ 和曲线 $y=\ln(e^2x)$ 都相切,故选 C.

[命题意图] 本题考查知识点为公切线问题,考查了学生的逻辑推理和数学运算素养.

9. AC **解析**:随机调查了 90 名学生,其中一共有 60 名学生认可,所以认可率大约为 66.7%,故 A 正确,B 错误;$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{90\times(20\times10-40\times20)^2}{40\times50\times60\times30}=9$,又因为 $6.635<9<10.828$,故 C 正确、D 错误,故选 AC.

[命题意图] 本题考查知识点为独立性检验和样本估计总体,考查了学生的数据分析和逻辑推理素养.

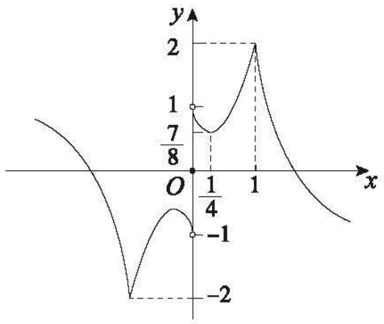
10. AC　**解析**：$|MN|$为该抛物线的焦点弦，$|MN|\geqslant 2p=4\Rightarrow p=2$，故 A 正确；设直线 l 的倾斜角为θ，则 $S_{\triangle OMN}=\frac{p^2}{2\sin\theta}\geqslant 2$，故 B 错误；对于选项 C，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，由于$|MN|$为该抛物线的焦点弦，所以 $x_1x_2=\frac{p^2}{4}=1$，$y_1y_2=-p^2=-4$，则 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1x_2+y_1y_2=-3$，故 C 正确；由于$|MN|$为该抛物线的焦点弦，所以 $|MN|=\frac{2p}{\sin^2\theta}=8\Rightarrow\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$ 或 $\theta=\frac{3\pi}{4}$，故 D 错误，故选 AC.

[**命题意图**] 本题考查知识点为抛物线与直线的位置关系，考查了学生的逻辑推理和数学运算素养.

11. BD　**解析**：对于选项 A，若 $AD\perp AC$，又因为 $AA_1\perp$平面 ABC，但是 D 不一定在平面 ABC 上，所以 A 不正确；对于选项 B，因为 $A_1C_1/\!/AC$，所以 $AC/\!/$平面 A_1C_1D，平面 $A_1C_1D\cap$平面 $ACD=l$，所以 $AC/\!/l$，所以 B 正确；对于选项 C，取$\triangle ABC$ 的中心 O，$\triangle A_1B_1C_1$ 的中心 O_1，OO_1 的中点为该三棱柱外接球的球心，所以外接球的半径 $R=\sqrt{1^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{3}$，所以外接球的表面积为 $4\pi R^2=\frac{28}{3}\pi$，所以 C 不正确；对于选项 D，该几何体的外接球即为三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的外接球，OO_1 的中点为该外接球的球心，该球心到平面 ACC_1A_1 的距离为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，点 D 到平面 ACC_1A_1 的最大距离为 $R-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{21}-\sqrt{3}}{3}$，所以 D 正确，故选 BD.

[**命题意图**] 本题考查知识点为组合体的线面位置关系及外接球问题，考查了学生的直观想象和数学运算素养.

12. BCD　**解析**：因为 $f(-x-1)=-f(x+1)$，所以函数 $f(x)$为奇函数，函数 $f(x)$的图象如图所示，对于选项 A，函数在 $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$ 上不单调，故 A 错误；对于选项 B，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，结合图象可知 $n\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$，故 B 正确；对于选项 C，分析可得，当 $2\sqrt{2}-1<k<2$ 时，$y=f(x)$的图象与直线 $y=kx$ 有 7 个交点，故 C 正确；对于选项 D，当方程 $f(x)=m(m>0)$的解为 4 个时，$\frac{7}{8}<m<1$，不妨设 $x_1<x_2<x_3<x_4$，根据对称性可得$x_2+x_3=\frac{1}{2}$. 分析图象可知，当 $m=1$ 时，方程 $f(x)=m$ 的解为 3 个，$x_1'=-\frac{15}{8}$，$x_2'=\frac{1}{2}$，$x_3'=\frac{9}{8}$，又因为 $x_1>x_1'$，$x_4>x_3'$，所以 $x_1+x_2+x_3+x_4>-\frac{1}{4}$，故 D 正确，故选 BCD.



[命题意图] 本题考查知识点为函数综合应用，考查了学生数形结合的能力及逻辑推理和数学运算素养.

13. $\frac{\pi}{3}$ **解析**：$f(0)=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=0\Rightarrow\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，又 $\varphi>0$，所以 φ 的最小值为$\frac{\pi}{3}$.

[命题意图] 本题考查知识点为三角函数的奇偶性，考查了学生的逻辑推理和数学运算素养.

14. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **解析**：因为 Q 为平面 $ABCD$ 内的动点，所以直线 BQ 为平面 $ABCD$ 上的任意直线，根据线面角的定义可得，平面的一条斜线与平面上任意直线所成的角中，平面的一条斜线与它在平面上的投影所成的角为最小角，所以本题可转化为求直线 AE 与平面 $ABCD$ 所成的角，因为平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$，所以直线 AE 在平面 $ABCD$ 上的投影为 AD，分析可得，直线 AE 与 AD 所成角为 $30°$，所以直线 AE 与直线 BQ 所成角的正切值最小为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

[命题意图] 本题考查知识点为异面直线所成角，考查了学生的数学抽象和逻辑推理素养.

15. $\frac{11}{30}$ **解析**：5 人分配 5 个礼物，基本事件总数 $n=A_5^5=120$，都没有拿到自己制作的礼物所包含的基本事件总数 $m=C_1^1(C_1^1C_2^1C_1^1+C_3^1C_3^1C_1^1)=44$，所以概率 $P=\frac{m}{n}=\frac{44}{120}=\frac{11}{30}$.

[命题意图] 本题考查知识点为错排问题，考查了学生的逻辑推理素养.

16. $2\sqrt{17}$ **解析**：假设存在这样的点 $Q(t,0)$，使得$\frac{|PM|}{|PQ|}=2$，则 $|PM|^2=4|PQ|^2$，设点 $P(x,y)$，则 $(x+4)^2+y^2=4[(x-t)^2+y^2]$，即 $x^2+y^2+8x+16=4(x^2+y^2-2tx+t^2)\Rightarrow3x^2+3y^2-(8t+8)x+4t^2-16=0$，该圆对照 $x^2+y^2=4$，所以 $t=-1$，所以点 $Q(-1,0)$，所以 $|PM|+2|PN|=2|PQ|+2|PN|=2(|PQ|+|PN|)\geqslant2|QN|=2\sqrt{17}$.

[命题意图] 本题考查动点轨迹问题以及与圆相关的最值问题，考查了学生转化的思想方法及数学抽象和数学运算素养.

17. **解**:(1)由正弦定理可得

$\sin A\cos C+(2\sin B+\sin C)\cos A=0$, ……………………………………………………(1分)

$\sin A\cos C+\sin C\cos A=-2\sin B\cos A$,

即 $\sin(A+C)=\sin B=-2\sin B\cos A$, ……………………………………………………(3分)

又 $B\in(0,\pi)$,$\therefore\sin B\neq0$,$\therefore\cos A=-\dfrac{1}{2}$,又 $A\in(0,\pi)$,

$\therefore A=\dfrac{2\pi}{3}$. ……………………………………………………………………(4分)

(2)根据角 A 的平分线与边 BC 交于点 D,所以 $\angle BAD=\angle CAD=\dfrac{\pi}{3}$,

$S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ABC}$,即 $\dfrac{1}{2}\times2\times c\times\sin\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{2}\times2\times b\times\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\times b\times c\times\sin\dfrac{2\pi}{3}$,

所以 $2(b+c)=bc$,即 $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$. ……………………………………………(7分)

$b+4c=2(b+4c)\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)=2\left(5+\dfrac{4c}{b}+\dfrac{b}{c}\right)\geqslant2\times9=18$,

当且仅当 $\dfrac{4c}{b}=\dfrac{b}{c}$ 时,即 $b=6$,$c=3$ 时,等号成立. ……………………………(9分)

所以 $b+4c$ 的最小值为 18. …………………………………………………………………(10分)

[**命题意图**]本题考查知识点为正弦定理、三角形面积转化及基本不等式,考查了学生的逻辑推理和数学运算素养.

18. **解**:(1)$a_n=2\sqrt{S_n}-1\Rightarrow(a_n+1)^2=4S_n$,$(a_{n-1}+1)^2=4S_{n-1}$,两式子作差可得

$a_n^2-a_{n-1}^2+2a_n-2a_{n-1}=4a_n\Rightarrow a_n^2-a_{n-1}^2-2(a_n+a_{n-1})=0\Rightarrow(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$,

又 $a_n+a_{n-1}\neq0$,所以 $a_n-a_{n-1}-2=0\Rightarrow a_n-a_{n-1}=2$,

可得数列 $\{a_n\}$ 为公差为 2 的等差数列, …………………………………………………(4分)

当 $n=1$ 时,$a_1=2\sqrt{S_1}-1\Rightarrow a_1-2\sqrt{a_1}+1=0\Rightarrow(\sqrt{a_1}-1)^2=0\Rightarrow a_1=1$,

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$. ……………………………………(6分)

(2)$b_n=a_n\cos\dfrac{2n\pi}{3}=(2n-1)\cos\dfrac{2n\pi}{3}$,$T_{3n+1}=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{3n-2}+b_{3n-1}+b_{3n}+b_{3n+1}$, ……(7分)

$T_{3n+1}=1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+5\times1+\cdots+(6n-5)\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+(6n-3)\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+(6n-1)\times$

$1+(6n+1)\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{n(1+6n-5)}{2}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{n(3+6n-3)}{2}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{n(5+6n-1)}{2}\times1+$

$(6n+1)\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

所以,数列 $\{a_n\}$ 的前 $3n+1$ 项和 $T_{3n+1}=-\dfrac{1}{2}$. ………………………………………(12分)

[**命题意图**]本题考查知识点为数列求通项与分组求和,考查了学生的逻辑推理和数学运算素养.

19. **解**:(1)根据定义可得,此 30 个数据从小到大排列,$30\times80\%=24$,所以这 30 个企业造成污染的第 80 百分位数是第 24 个数据与第 25 个数据的平均数,即$\frac{28+32}{2}=30$. ……………………………… (4 分)

(2)按照企业造成的污染点数从小到大排列,记为 $x_1,x_2,\cdots,x_{20}$,其平均数记为 x,方差记为 s_x^2;把剩下 10 个数据记为 $y_1,y_2,\cdots,y_{10}$,其平均数记为 y,方差记为 s_y^2;把总样本数据的平均数记为 z,方差记为 s^2.

由题意可知,$z=\frac{510}{30}=17$,$y=\frac{1}{10}(58+36+36+35+33+32+28+26+24+22)=\frac{1}{10}\times330=33$,

则 $x=\frac{1}{20}(510-330)=9$,由题知 $s_x^2=44.7$,$s_y^2=92.4$. ……………………………………………… (8 分)

$s^2=\frac{1}{30}\{20[s_x^2+(x-z)^2]+10[s_y^2+(y-z)^2]\}$.

代入数据可得 $s^2=\frac{1}{30}\{20\times[44.7+(9-17)^2]+10\times[92.4+(33-17)^2]\}=188.6$.

所以,这 30 个企业造成污染点的总体方差为 188.6. ……………………………………………… (12 分)

[**命题意图**] 本题考查知识点为统计中的用样本估计总体,考查了学生的数据分析、逻辑推理和数学运算素养.

20. **解**:(1)连接 A_1B,因为四边形 A_1B_1BA 为平行四边形,所以 O 为 A_1B 的中点,

又 D 为 BC 的中点,所以 $OD/\!/A_1C$,

又 $A_1C\subset$平面 ACC_1A_1,$OD\not\subset$平面 ACC_1A_1,所以 $OD/\!/$平面 ACC_1A_1. ……………………… (4 分)

(2)因为 $AB_1\perp A_1B$,又 $AB_1\perp A_1C$,所以 $AB_1\perp$平面 A_1BC,所以 $AB_1\perp BC$,

又 $AC\perp BC$,所以 $BC\perp$平面 AB_1C,可得平面 $ABC\perp$平面 AB_1C,

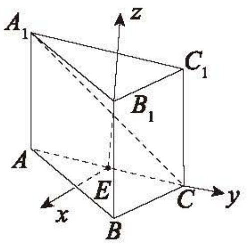
取 AC 的中点 E,因为 $AB_1=B_1C$,所以 $B_1E\perp$平面 ABC,$B_1E=2\sqrt{3}$,……………………… (7 分)

建立如图所示空间直角坐标系,$A(0,-2,0)$,$C(0,2,0)$,$B_1(0,0,2\sqrt{3})$,$B(2,2,0)$,

由 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B_1C_1}$ 得$C_1(-2,0,2\sqrt{3})$,则 $\overrightarrow{AC}=(0,4,0)$,$\overrightarrow{CC_1}=(-2,-2,2\sqrt{3})$,

设平面 ACC_1A_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{CC_1}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4y=0,\\ -2x-2y+2\sqrt{3}z=0,\end{cases}$

令 $x=\sqrt{3}$,所以 $\boldsymbol{n}_1=(\sqrt{3},0,1)$, ……………………………………………………………… (9 分)



因为 $B_1E\perp$平面 ABC,所以可取平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$, ……………………… (10 分)

设平面 ACC_1A_1 与平面 ABC 所成角为 α，则 $\cos\alpha=\left|\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}\right|=\dfrac{1}{2}$，……………………（11 分）

故平面 ACC_1A_1 与平面 ABC 所成角为 $60°$. ……………………………………………………（12 分）

[命题意图] 本题以斜三棱柱为载体，考查了线面平行和二面角，考查空间想象、数形结合等数学思想，考查学生逻辑推理和数学运算等核心素养.

21. **解**：(1) 因为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $A(2\sqrt{2},0)$，所以 $a=2\sqrt{2}$， …………………（1 分）

设 $H(x_0,y_0)$ 满足 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$，又 $k_{HA}\cdot k_{HB}=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow\dfrac{y_0}{x_0-2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{y_0}{x_0+2\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow-\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow b^2=2$，

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$. ……………………………………………………（4 分）

(2) 直线 $l:y=\dfrac{1}{2}x+t$，代入椭圆 $C:x^2+4y^2=8$，可得 $x^2+2tx+2t^2-4=0$.

由于直线 l 交椭圆 C 于 M,N 两点，所以 $\Delta=4t^2-4(2t^2-4)>0$，整理得 $-2<t<2$. ………（6 分）

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，由于点 Q 与 M 关于原点对称，所以 $Q(-x_1,-y_1)$，

于是有 $x_1+x_2=-2t$，$x_1x_2=2t^2-4$.

$k_{PQ}+k_{PN}=\dfrac{y_2-1}{x_2+2}+\dfrac{-y_1-1}{-x_1+2}=\dfrac{(2-x_1)(y_2-1)-(2+x_2)(y_1+1)}{(2+x_2)(2-x_1)}$， ……………………（8 分）

又 $y_1=\dfrac{1}{2}x_1+t$，$y_2=\dfrac{1}{2}x_2+t$，于是有 $(2-x_1)(y_2-1)-(2+x_2)(y_1+1)=2(y_2-y_1)-(x_1y_2+x_2y_1)+x_1-x_2-4=x_2-x_1-(x_1x_2+tx_1+tx_2)+x_1-x_2-4=-x_1x_2-t(x_1+x_2)-4=-(2t^2-4)-t(-2t)-4=0$， …………………………………………………（11 分）

故直线 PQ 的斜率与直线 PN 的斜率之和为 0. ………………………………………………（12 分）

[命题意图] 本题考查知识点为椭圆的方程及直线与椭圆的位置关系，考查了学生的逻辑推理和数学运算素养.

22. **解**：(1) 已知 $f(x)=\dfrac{\ln(x-1)}{x^2}(x>1)$，可得 $f'(x)=\dfrac{\dfrac{x^2}{x-1}-2x\ln(x-1)}{x^4}=\dfrac{x-2(x-1)\ln(x-1)}{(x-1)x^3}$，…
…………………………………………………………………………………（1 分）

令 $g(x)=x-2(x-1)\ln(x-1)$，则 $g'(x)=-2\ln(x-1)-1$，

函数 $g'(x)$ 单调递减，且当 $x=1+\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ 时，$g'(x)=0$，故函数 $g(x)$ 先增后减，

当 $1<x<1+\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ 时，$g(x)=x-2(x-1)\ln(x-1)$，

其中 $\ln(x-1)<0$，$2(x-1)>0$，$\therefore -2(x-1)\ln(x-1)>0$，$\therefore g(x)>0$.

当 $x=e^2+1$ 时，$g(e^2+1)=e^2+1-4e^2=1-3e^2<0$，

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 只有一个零点，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的极值点个数为 1. ………………………………（4 分）

(2)$(x+1)^2f(x+1)>m-\frac{3m}{x}-1$ 变形,得 $\ln x+1>m\left(1-\frac{3}{x}\right)$,整理得 $x\ln x+x-mx+3m>0$.

令 $g(x)=x\ln x+x-mx+3m$,则 $g'(x)=\ln x+2-m$,$\because x>1$,$\therefore \ln x>0$,

若 $m\leqslant 2$,则 $g'(x)>0$ 恒成立,即 $g(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增,

由 $g(1)\geqslant 0$,$\therefore 1+2m\geqslant 0$,$\therefore m\geqslant -\frac{1}{2}$,$\therefore -\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant 2$.此时 m 可取的最大整数为 2. ……… (6 分)

若 $m>2$,令 $\ln x+2-m>0$,则 $x>e^{m-2}$,令 $\ln x+2-m<0$,则 $1<x<e^{m-2}$,

所以 $g(x)$ 在区间 $(1,e^{m-2})$ 上单调递减,在区间 $(e^{m-2},+\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上有最小值,$g(x)_{\min}=g(e^{m-2})=3m-e^{m-2}$.

于是问题转化为 $3m-e^{m-2}>0(m>2)$ 成立,求 m 的最大值. …………………………………… (8 分)

令 $h(x)=3x-e^{x-2}$,则 $h'(x)=3-e^{x-2}$,$\because$ 当 $x>2+\ln 3$ 时,$h'(x)<0$,$h(x)$ 单调递减,

当 $2<x<2+\ln 3$ 时,$h'(x)>0$,$h(x)$ 单调递增.$\therefore h(x)$ 在 $x=2+\ln 3$ 处取得最大值.

$\because 1<\ln 3<2$,$\therefore 3<2+\ln 3<4$,$\because h(3)=9-e>0$,$h(2+\ln 3)=3+3\ln 3>0$,

$h(4)=12-e^2>0$,$h(5)=15-e^3<0$,此时 m 可取的最大整数为 4. ……………………………… (11 分)

综上,m 可取的最大整数为 4. ………………………………………………………………… (12 分)

[命题意图] 本题考查知识点为导数极值点个数的讨论、恒成立求参问题,考查了学生的逻辑推理和数学运算素养.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。