江西省吉安市重点中学六校协作体2023届五月联合考试·高三文科数学
参考答案、提示及评分细则

1. D　$M\cap N=\{2,3,4,5\}$. 故选 D.

2. C　$z=1+\mathrm{i}$, $|z+1|=|2+\mathrm{i}|=\sqrt{5}$. 故选 C.

3. B　$\because \overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, $\therefore m=-\frac{3}{4}$, $n=\frac{1}{4}$, $\therefore m+n=-\frac{1}{2}$. 故选 B.

4. C　$V_{半球}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 2^3=\frac{16}{3}\pi$, $S_{柱}=\pi\cdot 2^2=4\pi$, 故水面高度 $h=\frac{V_{半球}}{S_{柱}}=\frac{\frac{16}{3}\pi}{4\pi}=\frac{4}{3}$. 故选 C.

5. A　点 P 的所有可能性有 $(2,-2)$, $(2,-1)$, $(3,-2)$, $(3,-1)$, 共 4 种, 符合题意的有 $(2,-2)$, $(2,-1)$, 共 2 种, 所以概率为 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. 故选 A.

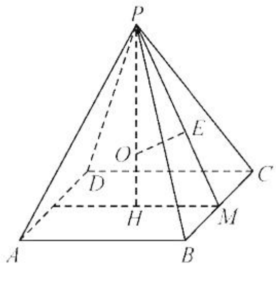
6. B　根据题意可得 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n(n\in\mathbf{N}^*)$, $a_3=\frac{1}{8}$, 故 A 正确; $\frac{a_5}{a_2}=q^3=\frac{1}{8}$, 故 B 错误; $a_3=\frac{1}{8}$, $a_4=\frac{1}{16}$, 则 $a_3-a_4=\frac{1}{16}$, 故 C 正确; $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^5}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{31}{32}$, 故 D 正确. 故选 B.

7. C　根据题意可得 $S=\log_2 3\times\log_3 4\times\log_4 5\times\cdots\times\log_{31}32=\log_2 32=5$. 故选 C.

8. B　由 $f\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)=f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 可知: $f(x)$ 关于 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称, 故 $\omega\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}$, $\omega=4k+\frac{2}{3}$, $k=0$ 时, ω 取最小值为 $\frac{2}{3}$. 故选 B.

9. B　由定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增, 得 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, 由 $f(t^4-2t^3-t^2-2t)+f(1-mt^2)<0\Rightarrow f(t^4-2t^3-t^2-2t)<f(mt^2-1)$, $\therefore t^4-2t^3-t^2-2t<mt^2-1$, $mt^2>t^4-2t^3-t^2-2t+1$, $m>t^2-2t-1-\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2\left(t+\frac{1}{t}\right)-3$ 对 $t\in\left(\frac{1}{2},3\right]$ 恒成立, 令 $n=t+\frac{1}{t}$, $n\in\left[2,\frac{10}{3}\right]$, $h(n)=n^2-2n-3$, $h_{\max}\left(\frac{10}{3}\right)=\frac{100}{9}-\frac{20}{3}-3=\frac{13}{9}$, $\therefore m>\frac{13}{9}$. 故选 B.

10. C　设球心为 O, O 在平面 $ABCD$ 内的射影为 H, M 为 BC 中点, $OH\perp PM$ 于 E, 半径为 r, $AB=\frac{5}{2}r=x$, $PH=h$, 则 $\triangle POE\backsim\triangle PMH\Rightarrow\frac{r}{\frac{5}{4}r}=\frac{h-r}{\sqrt{h^2+\left(\frac{5}{4}r\right)^2}}\Rightarrow\frac{h}{r}=\frac{50}{9}$, $\tan\angle PAH=\frac{h}{AH}=\frac{2\sqrt{2}}{5}\cdot\frac{h}{r}=\frac{20\sqrt{2}}{9}$. 故选 C.



11. D　设 $l: x=ny-1$ 代入 $y^2=2px=2p(ny-1)\Rightarrow y^2-2pny+2p=0$　①, 故 $\Delta=(2pn)^2-4\cdot 2p=0\Rightarrow p=\frac{2}{n^2}$ 代入①式得 $\left(y-\frac{2}{n}\right)^2=0$, $\therefore y=\frac{2}{n}=p$ 与 $p=\frac{2}{n^2}$ 得 $n=1$, $p=2$, 得 $Q(1,2)$, $k_{QA}+k_{QB}=\frac{y_A-2}{x_A-1}+\frac{y_B-2}{x_B-1}=\frac{y_A-2}{\frac{y_A^2}{4}-1}+\frac{y_B-2}{\frac{y_B^2}{4}-1}=\frac{4}{y_A+2}+\frac{4}{y_B+2}=\frac{4(y_A+y_B+4)}{y_Ay_B+2(y_A+y_B)+4}=\frac{4(y_A+y_B+4)}{4+2(y_A+y_B)+4}=2$. 故选 D.

12. A　由 $\ln(1+0.1)<0.1$ 知: $b<a$, 又 $c=\frac{2}{21}<\frac{2}{20}=0.1=a$, 以下比较 b, c 大小, $c=\frac{2}{21}=\frac{0.2}{2.1}=\frac{2\times 0.1}{2+0.1}$, 构造: $f(x)=\ln(1+x)-\frac{2x}{2+x}$, 则 $f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{4}{(2+x)^2}=\frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2}>0$, 故 $f(x)$ 为增函数, $f(0.1)>$

$f(0)\Rightarrow \ln 1.1>\frac{2}{21}$,故 $b>c$,故选 A.

13.$\frac{3}{2}$　根据众数是 5,可得 $m=5$,则样本的平均数为 $\frac{2+4+5+5}{4}=4$,∴方差 $=\frac{1}{4}\times[(5-4)^2+(2-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2]=\frac{3}{2}$.

14.$2\sqrt{3}$　$a+b\geqslant\frac{3}{a}+\frac{3}{b}\Rightarrow(a+b)^2\geqslant\left(\frac{3}{a}+\frac{3}{b}\right)(a+b)=6+\frac{3b}{a}+\frac{3a}{b}\geqslant12$,$a+b\geqslant2\sqrt{3}$,当且仅当 $a=b=\sqrt{3}$ 时取等号.

15.$\sqrt{3}-1$　根据 $\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{OF_2}$,得 $\overrightarrow{F_1M}\cdot(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OF_2})=\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2M}=0$,∴$F_1M\perp F_2M$.

$$\therefore\begin{cases}|F_1M|-|F_2M|=2a,\\|F_1M|^2+|F_2M|^2=4c^2,\\\frac{1}{2}\cdot|F_1M|\cdot|F_2M|=\frac{\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2)\end{cases}\Rightarrow4a^2+2\sqrt{3}c^2=4c^2,\therefore\frac{c^2}{a^2}=\frac{2}{2-\sqrt{3}}=2(2+\sqrt{3})=4+2\sqrt{3}=(\sqrt{3}+1)^2,\therefore e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}+1.$$

16.$\frac{\sqrt{3}}{4}$　由 $a^2+ab=b^2(3\cos^2B-\sin^2B)$ 得 $a^2+ab=b^2(4\cos^2B-1)$,又∵$c=2b\cos B$,

∴$\cos^2B=\frac{c^2}{4b^2}$,∴$a^2+ab=b^2\left(\frac{c^2}{b^2}-1\right)$,

∴$a^2+ab=c^2-b^2$,∴$a^2+b^2-c^2=-ab$,$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{1}{2}$,$C\in(0,\pi)$,

∴$C=\frac{2\pi}{3}$,又∵$c=2b\cos B$,∴$\sin C=2\sin B\cos B=\sin 2B$,

$\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin 2B$,$2B\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$,∴$B=\frac{\pi}{6}$,$A=\frac{\pi}{6}$,∴$a=b=1$,

∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

17.解:(1)根据表中数据,男性共有 100 名,保护动物意识强的有 70 名,

设男性保护动物意识强的事件为 A,则 $P(A)=\frac{70}{100}=\frac{7}{10}$;……………………………………………… 3 分

女性共有 100 名,保护动物意识强的有 40 名,

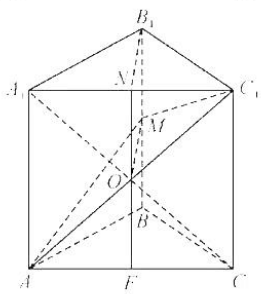
设女性保护动物意识强的事件为 B,则 $P(B)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$;……………………………………………… 6 分

(2)因为 $K^2=\frac{200\times(70\times60-30\times40)^2}{100\times100\times110\times90}=\frac{200}{11}\approx18.182>6.635$. ………………………………………… 9 分

所以有 99% 的把握认为保护动物意识的强弱与性别有关,此推断犯错误的概率不大于 0.010. …… 12 分

18.(1)证明:取 A_1C_1 的中点 N,连接 B_1N,∵$A_1B_1=B_1C_1$,∴$B_1N\perp A_1C_1$,

∵$ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱,∴$B_1N\perp$平面 ACC_1A_1. ……………………… 3 分



连接 A_1C 交 AC_1 于 O 点,连接 MO,连接 NO 并延长交 AC 于点 F,

∵M,O 分别是 B_1B,NF 的中点,∴$MO\parallel B_1N$,∴$MO\perp$平面 AA_1C_1C.

又∵$MO\subset$平面 AMC_1,∴平面 $AMC_1\perp$平面 ACC_1A_1; ……………………… 6 分

(2)解:∵$ABC-A_1B_1C_1$ 是直棱柱,且$\angle ABC=90^\circ$,

∴$AB\perp$平面 BCC_1M, ……………………………………………………… 8 分

又∵M 是 BB_1 中点,$BB_1=4$,∴$MB=2$. ……………………………………… 9 分

∵$S_{MBCC_1}=\frac{1}{2}\times(2+4)\times2=6$,

∴$V_{A-CC_1MB}=\frac{1}{3}S_{MBCC_1}\cdot h=\frac{1}{3}\times6\times2=4$. ……………………………………………… 12 分

19. 解：(1)根据题意可得 $a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1)+4(n-1)=4n-2$, …………………………………………… 3 分

则 $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=(4n-6)+(4n-10)+\cdots+2+\left(-\frac{1}{2}\right)=$

$2(n-1)^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(2n-1)(2n-3)$； …………………………………………………………… 6 分

(2) ∵ $\frac{1}{a_n}=\frac{2}{(2n-1)(2n-3)}=\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}$. ……………………………………………………… 9 分

∴ $S_{2023}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2023}}=-\frac{1}{1}-\frac{1}{1}+\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4043}-\frac{1}{4045}=-\frac{4046}{4045}$. ……………………… 12 分

20. 解：(1)函数 $f(x)=x-(a+1)\ln x-\frac{a}{x}$, $f'(x)=1-\frac{a+1}{x}+\frac{a}{x^2}=\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^2}=\frac{(x-1)(x-a)}{x^2}$. ……

…………………………………………………………………………………………………… 2 分

当 $a\leqslant 0$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $x>1$，令 $f'(x)<0$，得 $0<x<1$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减，在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增． ………………………………… 3 分

当 $0<a<1$ 时，令 $f'(x)>0$ 得 $x\in(0,a)\cup(1,+\infty)$，令 $f'(x)<0$，得 $x\in(a,1)$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(a,1)$ 上单调递减． ……………………………………… 4 分

当 $a=1$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，∴ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增．

当 $a>1$ 时，令 $f'(x)>0$ 得 $x\in(0,1)\cup(a,+\infty)$，令 $f'(x)<0$，得 $x\in(1,a)$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(1,a)$ 上单调递减； …………………………………… 5 分

(2)当 $a=0$ 时，$f(x)=x-\ln x$，则 $m+f(x)-(x-2)e^x>0 \Rightarrow m>(x-2)e^x-f(x)=(x-2)e^x+\ln x-x$，

设 $h(x)=(x-2)e^x+\ln x-x$，$x\in(0,1]$，则 $h'(x)=(x-1)\left(e^x-\frac{1}{x}\right)$， ………………………… 7 分

当 $0<x\leqslant 1$ 时，$x-1\leqslant 0$，

设 $u(x)=e^x-\frac{1}{x}$，则 $u'(x)=e^x+\frac{1}{x^2}>0$，所以 $u(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

又 $u\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$，$u(1)=e-1>0$，

所以 $\exists x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $u(x_0)=0$，即 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，$\ln x_0=-x_0$． ………………………………… 9 分

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$u(x)<0$，$h'(x)>0$；

当 $x\in(x_0,1)$ 时，$u(x)>0$，$h'(x)<0$，

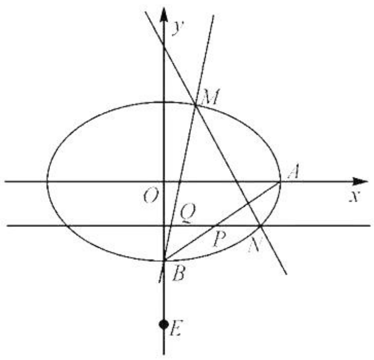
所以函数 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,1)$ 上单调递减，

所以 $h(x)_{\max}=h(x_0)=(x_0-2)e^{x_0}+\ln x_0-x_0=(x_0-2)\cdot\frac{1}{x_0}-2x_0=1-\left(\frac{2}{x_0}+2x_0\right)$， …………… 10 分

因为函数 $y=1-\left(\frac{2}{x_0}+2x_0\right)$ 在 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递增，所以 $h(x_0)\in(-4,-3)$，

因为 $m>h(x)$ 对任意的 $x\in(0,1]$ 恒成立，又 $m\in\mathbf{Z}$，

所以 m 的最小值是 -3． …………………………………………………………………………… 12 分



21. 解：(1)由 $\begin{cases}a^2+b^2=5,\\ \frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1\end{cases}\to\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a^2=\frac{5}{4},\\ b^2=\frac{15}{4},\end{cases}$ ……………………… 2 分

由 $a>b>0$ 可知 $\begin{cases}a^2=\frac{5}{4},\\ b^2=\frac{15}{4}\end{cases}$ 不合题意，故 $\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=1\end{cases}$

故椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$； …………………………………… 4 分

(2)设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$Q(x_0,y_0)$，MN 直线方程为 $y=kx+t$，

由 $k_{BM}=k_{BQ}\Rightarrow \frac{y_1+1}{x_1}=\frac{y_2+1}{x_0}\Rightarrow x_0=\frac{x_1(y_2+1)}{y_1+1}$. …………………………………………………… 6 分

设 NQ 的中点为 P，$P(x',y')$.

则 $x'=\frac{x_0+x_2}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{x_1(y_2+1)}{y_1+1}+x_2\right]=\frac{2kx_1x_2+(t+1)(x_1+x_2)}{2(kx_1+t+1)}$，$y'=y_2=kx_2+t$.

将 (x',y') 代入直线 AB 方程：$x-2y-2=0$.

整理得 $(2k-4k^2)x_1x_2+(t+1)(1-4k)(x_1+x_2)-4(t+1)^2=0(*)$.

将 $y=kx+t$ 代入 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 整理得 $(1+4k^2)x^2+8ktx+4t^2-4=0$. …………………………………… 8 分

$\therefore x_1x_2=\frac{4t^2-4}{1+4k^2}$，$x_1+x_2=\frac{-8kt}{1+4k^2}$，代入 $(*)$ 式整理得 $(2k-4k^2)(4t^2-4)+(1-4k)(-8kt)-4(t+1)^2(1+4k^2)=0\Rightarrow t=-2k-1$. …………………………………………………… 10 分

故直线 l 方程为 $y=kx-2k-1$，恒过定点 $S(2,-1)$.

作 $ET\perp l$ 于 T，$|ET|\leqslant|ES|=\sqrt{5}$，当且仅当 l 斜率为 -2 时取等号. $\therefore d$ 的最大值为 $\sqrt{5}$. ………… 12 分

22. 解：(1) ∵曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=1+\sin t,\end{cases}$ $\sin t=y-1$，$\cos^2 t+\sin^2 t=1$.

$\therefore x^2+(y-1)^2=1$. …………………………………………………… 3 分

由 $\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)+2m=0$，可得 $\rho\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)+2m=0$.

$\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y+2m=0$，$\sqrt{3}x+y+4m=0$. …………………………………………………… 5 分

故曲线 C 的普通方程为 $(x-1)^2+y^2=1$，直线 l 的直角坐标方程为 $\sqrt{3}x+y+4m=0$；………………… 6 分

(2) 由①得：曲线 C 是以 $(0,1)$ 为圆心，1 为半径的圆，

曲线 C 与直线 l 无公共点，则圆心到直线 l 的距离大于半径，

则 $d=\frac{|1+4m|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}>1$，$|1+4m|>2$. …………………………………………………… 8 分

解得 $m>\frac{1}{4}$ 或 $m<-\frac{3}{4}$，故 m 的取值范围为 $\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$. …………………………… 10 分

23. 解：(1) 由已知可得 $f(x)=\begin{cases}4, & x\geqslant 1,\\ 2x+2, & -3<x<1,\\ -4, & x\leqslant -3.\end{cases}$ …………………………………………… 2 分

当 $x\leqslant -3$ 时，$-4\leqslant 1$ 成立，

当 $-3<x<1$ 时，$2x+2\leqslant 1$，即 $x\leqslant -\frac{1}{2}$. …………………………………………………… 4 分

综上所述，$f(x)\leqslant 1$ 的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x\leqslant -\frac{1}{2}\right\}$；…………………………………………………… 5 分

(2) 由 (1) 得 $f(x)$ 的最大值为 4，$\therefore n=4$. …………………………………………………… 6 分

$\therefore a+2b=4ab$，变形得 $\frac{1}{4b}+\frac{1}{2a}=1$. …………………………………………………… 7 分

$\because a>0, b>0$,

$\therefore a+2b=(a+2b)\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{4b}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{a}{4b}+\frac{b}{a}\geqslant 1+2\sqrt{\frac{a}{4b}\cdot\frac{b}{a}}=2$ $\left(\text{当且仅当 } \frac{a}{4b}=\frac{b}{a}\text{，即 } a=2b, b=\frac{1}{2}, a=1 \text{ 时取“=”号}\right)$.

$\therefore a+2b$ 的最小值为 2. …………………………………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。