

高三数学试卷(理科)

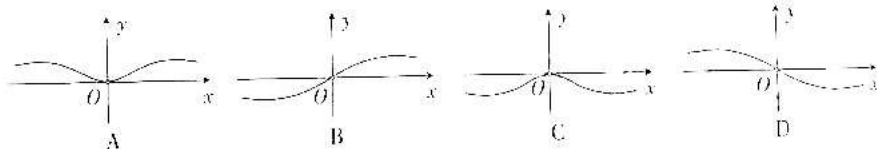
考生注意:

1. 本试卷分第I卷(选择题)和第II卷(非选择题)两部分,共150分. 考试时间120分钟.
2. 请将各题答案填写在答题卡上.
3. 本试卷主要考试内容:高考全部内容.

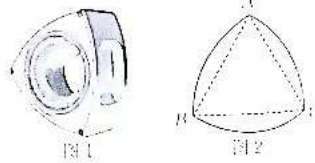
第I卷

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 复数 $z = (3 + 2i)(2 - i)$ 在复平面内对应的点位于
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
2. 已知集合 $A = \{x | \ln(x-2) < 0\}$, $B = \{x | 5 - 2x > 0\}$, 则 $A \cap B$
A. $\{x | 2 < x < \frac{5}{2}\}$ B. $\{x | \frac{5}{2} < x < 3\}$ C. $\{x | 1 < x < \frac{5}{2}\}$ D. $\{x | 1 < x < 2\}$
3. 函数 $f(x) = \frac{x^2}{2^x - 2^{-x}}$ 的部分图象大致为



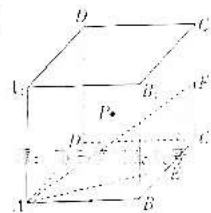
4. 已知向量 $\mathbf{a} = (3, 4)$, $\mathbf{b} = (8, m)$, 且 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$, 则 $|\mathbf{b}_1| =$
A. 6 B. 8 C. 10 D. 12
5. $(x^2 - \frac{1}{x})^{10}$ 的展开式中含 x^2 项的系数是
A. 120 B. 126 C. -45 D. 45
6. 转子发动机采用三角转子旋转运动来控制压缩和排放. 如图1, 三角转子的外形是有三条圆棱的曲面棱柱, 且圆棱垂直于底面, 底面是以正三角形的三个顶点为圆心, 正三角形的边长为半径画圆构成的曲面三角形(如图2), 正三角形的顶点称为曲面三角形的顶点, 圆棱长为曲面棱柱的高, 记该曲面棱柱的底面积为 S , 高为 h . 已知曲面棱柱的体积 $V = Sh$. 如图1所示的曲面棱柱的体积为 $9(\pi - \sqrt{3})$, $h = 2$, 则 $AB =$
A. 2 B. 3 C. 4 D. 6



【1】高三数学·第1卷(共4页)理科·2】



7. 九连环是我国从古至今广为流传的一种益智游戏,它由九个铁丝圆环相连成串,在某种玩法中,用 a_n 表示解下 $n(n \leq 9, n \in \mathbf{N}^+)$ 个圆环所需要移动的最少次数,数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且 $a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n - 1, & n \text{ 为奇数,} \\ 2a_n + 2, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$ 则 $a_9 + a_8 =$
- A. 287 B. 272 C. 158 D. 113
8. 某校大一新生 A, B, C, D 欲加入该校的文学社、书法社、羽毛球社,已知这 4 名大一新生每人只加入了 1 个社团,则这 4 名大一新生恰好加入其中 2 个社团的不同情况有
- A. 21 种 B. 30 种 C. 12 种 D. 60 种
9. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右顶点为 M, 以 M 为圆心, 双曲线 C 的半焦距为半径的圆与双曲线 C 的一条渐近线相交于 A, B 两点, 若 $\angle AMB = \frac{2\pi}{3}$, 则双曲线 C 的离心率为
- A. $\sqrt{5}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{7}{2}$
10. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = 2f(x-1)$, 当 $0 \leq x < 2$ 时, $f(x) = e^x - 3x$, 若对任意的 $x \in (-\infty, m]$, 都有 $f(x) \geq -8$, 则 m 的最大值是
- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7
11. 如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别是棱 BC, CC_1 的中点, 点 P 在正方形 ABB_1A_1 内, 若 $AB = 2, A_1P \parallel$ 平面 AEF, 则 DP 的最小值是
- A. 2 B. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ C. $2\sqrt{2}$ D. 3
12. 已知 $a = \sqrt[3]{e}, b = \ln 3, c = \frac{1}{3}$, 则
- A. $a > c > b$ B. $c > a > b$ C. $a > b > c$ D. $c > b > a$



第 II 卷

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

13. 某校高三年级进行了一次高考模拟测试, 这次测试的数学成绩 $X \sim N(90, 8^2)$, 且 $P(X < 60) = 0.1$, 规定这次测试的数学成绩高于 120 分为优秀, 若该校有 1200 名高三学生参加测试, 则数学成绩为优秀的人数是 Δ .
14. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_3 + a_5 = 12, a_7 + a_9 + a_{11} = 18$, 则 $\{a_n\}$ 的公差是 Δ .
15. 已知函数 $f(x) = \tan 2x$ 与 $g(x) = \sin(x - \frac{\pi}{6})$ 的图象在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的交点个数为 m , 直线 $x + y = 2$ 与 $f(x)$ 的图象在区间 $[0, \pi^+]$ 上的交点的个数为 n , 则 $m + n = \Delta$.
16. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F, 过点 F 的直线 l 与抛物线 C 相交于 A, B 两点, 分别过 A, B 两点作抛物线 C 的准线的垂线, 垂足分别为 D, E, 若 $S_{\triangle ADF} = \frac{1}{4} S_{\triangle BEF} = \frac{1}{4}$, $AD = \sqrt{2}$, 则 $p = \Delta$.

【2023 数学 第 2 页 (共 4 页)】

三、解答题:共70分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.17~21题为必考题,每个试题考生都必须作答.第22,23题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共60分.

17. (12分)

通过市场调查,现得到某种产品的资金投入 x (单位:百万元)与获得的利润 y (单位:百万元)的数据,如下表所示:

资金投入 x	1	2	3	4	5
利润 y	5	6	7	8	9

- (1)求样本 $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, 5)$ 的相关系数(精确到0.01);
 (2)根据上表提供的数据,用最小二乘法求出 y 关于 x 的线性回归直线方程;
 (3)现投入资金1千万元,求获得利润的估计值.

附:相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$, $\sqrt{2} \approx 1.414$.

对于一组数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$,其回归直线 $\hat{y} = bx + a$ 的斜率和截距的最

小二乘估计分别为 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$.

18. (12分)

如图,在底面为矩形的四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$.

- (1)证明:平面 $PAD \perp$ 平面 PCD .
 (2)若 $PA=AD=3, AB=1, E$ 在棱 AD 上,且 $AD=3AE$,求 PE 与平面 PBD 所成角的正弦值.



19. (12分)

在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,且 $a = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \sin(A + \frac{\pi}{4}) - b$.

- (1)求角 C ;
 (2)若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, D 为 AB 边的中点,求线段 CD 长的取值范围.



20. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $P(2, 0)$ 是椭圆 C 上一点.

- (1) 求椭圆 C 的标准方程.
- (2) 过点 $(6, 0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B (异于点 P) 两点, 直线 PA, PB 的斜率分别是 k_1, k_2 , 试问 $k_1 k_2$ 是否为定值? 若是, 求出该定值; 若不是, 请说明理由.

21. (12分)

定义: 若函数 $y = f(x)$ 在定义域内存在实数 x_0 , 使得 $f(x_0 + k) = f(x_0) + f(k)$ 成立, 其中 k 为大于 0 的常数, 则称点 (x_0, k) 为函数 $f(x)$ 的 k 级“平移点”.

- (1) 判断函数 $g(x) = x \ln(x+1)$ 的 2 级“平移点”的个数, 并求出 2 级“平移点”;
- (2) 若函数 $h(x) = ax^2 + x \ln x$ 在 $[1, +\infty)$ 上存在 1 级“平移点”, 求实数 a 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生从第 22, 23 两题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一个题目计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程](10分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 M 的方程为 $y = \sqrt{-x^2 + 4x}$, 曲线 N 的方程为 $xy = 9$. 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系.

- (1) 求曲线 M, N 的极坐标方程;
- (2) 若射线 $l: \theta = \theta_0 (\rho \geq 0, 0 \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2})$ 与曲线 M 交于点 A (异于极点), 与曲线 N 交于点 B , 且 $|OA| \cdot |OB| = 12$, 求 θ_0 .

23. [选修 4-5: 不等式选讲](10分)

已知函数 $f(x) = |x-a-1| + |x-2a|$.

- (1) 证明: 存在 $a \in (0, +\infty)$, 使得 $f(x) \geq 1$ 恒成立.
- (2) 当 $x \in [2a, 4]$ 时, $f(x) \leq x+a$, 求 a 的取值范围.



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线