

成都七中高 2024 届零诊模拟考试数学试题（文科）

时间：120 分钟 满分：150 分

一、单选题：共 12 道小题，每题 5 分，共 60 分.

1. 直线 $l_1: x+2y-1=0$ 与直线 $l_2: ax+y+2=0$ 平行，则 $a = (\quad)$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 2 D. -2

2. 设 $z = \frac{1-i}{1+i} + 2i$ ，则 z 的虚部为 (\quad)

- A. i B. $3i$ C. 1 D. 3

3. 一组数据包括 47、48、51、54、55，则这组数据的标准差为 (\quad)

- A. $\sqrt{10}$ B. $5\sqrt{2}$ C. 10 D. 50

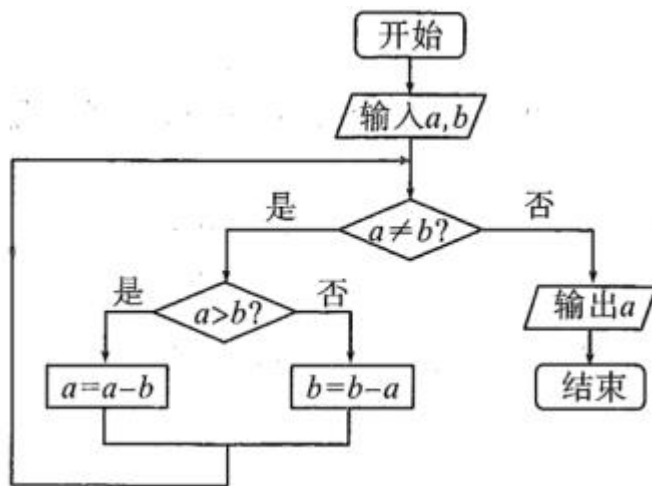
4. 已知函数 $f(x)$ 在其定义域 R 上的导函数为 $f'(x)$ ，当 $x \in R$ 时，“ $f'(x) > 0$ ”是“ $f(x)$ 单调递增”的 (\quad)

- A. 充要条件 B. 既不充分也不必要条件
C. 必要不充分条件 D. 充分不必要条件

5. 圆 $C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 与直线 $l: \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ 的位置关系为 (\quad)

- A. 相切 B. 相交 C. 相离 D. 无法确定

6. 如图所示的算法框图思路源于我国古代数学名著《九章算术》中的“更相减相术”，执行该算法框图，若输入的 a 、 b 分别为 36、96，则输出的 $a = (\quad)$



- A. 0 B. 8 C. 12 D. 24

7. 直线 $x=2$ 与抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 交于 D 、 E 两点，若 $\overline{OD} \cdot \overline{OE} = 0$ ，其中 O 为坐标原点，则 C 的准线方程为 (\quad)

- A. $x = -\frac{1}{4}$ B. $x = -\frac{1}{2}$ C. $x = -1$ D. $x = -2$

8. 函数 $y = \lg x$ 的图象经过变换 $\varphi: \begin{cases} x' = 10x, \\ y' = y + 2 \end{cases}$ 后得到函数 $y' = f(x')$ 的图象，则 $f(x) = (\quad)$

- A. $-1 + \lg x$ B. $1 + \lg x$ C. $-3 + \lg x$ D. $3 + \lg x$

9. 有甲、乙、丙、丁四名学生参加歌唱比赛，其中只有一位获奖，有人走访了四人，甲说：“是乙或丙获奖。”乙

说：“甲、丙都未获奖。”丙说：“我获奖了。”丁说：“是乙获奖。”四位歌手的话只有两句是对的，则获奖的歌手是（ ）

- A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

10. 点 A 、 B 在以 PC 为直径的球 O 的表面上，且 $AB \perp BC$ ， $AB = BC = 2$ ，已知球 O 的表面积是 12π ，下列说法中正确的个数是（ ）

① $BC \perp$ 平面 PAB ；② 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ；③ $PB \perp AC$ 。

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

11. 关于圆周率 π ，数学史上出现过很多有创意的求法，如著名的蒲丰实验和查理斯实验。受其启发，可通过设计如下实验来估计 π 值：先请 100 名同学每人随机写下一组正实数对 (x, y) ，且要求 x, y 均小于 1；再统计 x, y 和

1 作为三边长能形成钝角三角形的数对 (x, y) 的个数 m ；最后利用统计结果估计 π 值。假如某次实验结果得到 $m = 28$ ，那么本次实验可以将 π 值估计为（ ）

- A. $\frac{22}{7}$ B. $\frac{47}{15}$ C. $\frac{78}{25}$ D. $\frac{53}{17}$

12. 函数 $f(x) = \log_{\frac{2}{5\pi}} x - \sin x$ 零点个数为（ ）

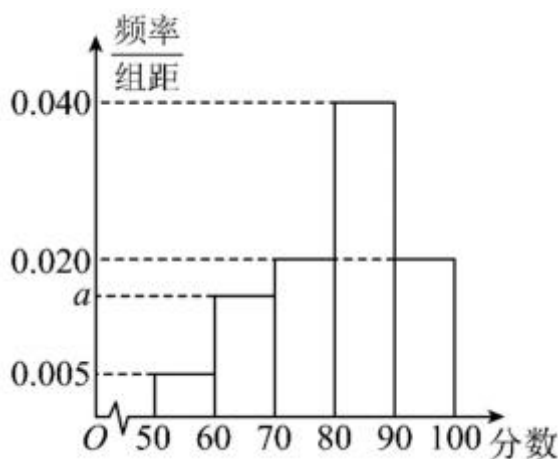
- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

二、填空题：共 4 道小题，每题 5 分，共 20 分。

13. 命题 “ $\forall x > 0, \tan x > x$ ” 的否定为_____。

14. 函数 $f(x) = \frac{x}{\cos x}$ 的图象在 $x = \pi$ 处的切线方程为_____。

15. 某区为了解全区 12000 名高二学生的体能素质情况，在全区高二学生中随机抽取了 1000 名学生进行体能测试，并将这 1000 名的体能测试成绩整理成如下频率分布直方图。根据此频率分布直方图，这 1000 名学生平均成绩的估计值为_____。



16. 双曲线 $H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ 其左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线 PF_2 与双曲线 H 在第一象限交于点 P ，设双曲线 H 右顶点为 A ，若 $|PF_2| \geq 6|AF_2|$ ，则双曲线 H 的离心率的取值范围为_____。

三、解答题：共 5 道大题，共 70 分。

17. (12 分) 设函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{f'(-1)}{4}x^2 + 2x - f(1)$ ，

(1) 求 $f'(-1)$ 、 $f(1)$ 的值；

(2) 求 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的最值.

18. (12分) 如图1, E 、 F 、 G 分别是边长为4的正方形的三边 AB 、 CD 、 AD 的中点, 先沿着虚线段 FG 将等腰直角三角形 FDG 裁掉, 再将剩下的五边形 $ABCFG$ 沿着线段 EF 折起, 连接 AB 、 CG 就得到了一个空间五面体, 如图2.

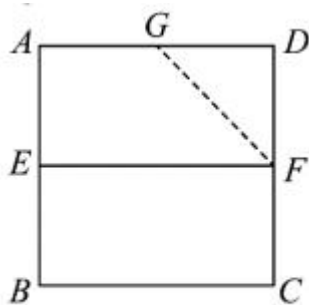


图1

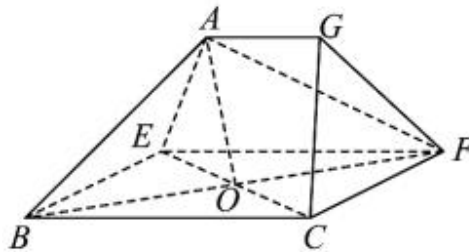


图2

(1) 若 O 是四边形 $EBCF$ 对角线的交点, 求证: $AO \parallel$ 平面 GCF ;

(2) 若 $\angle AEB = \frac{2\pi}{3}$, 求三棱锥 $A-BEF$ 的体积.

19. (12分) 信创产业即信息技术应用创新产业, 是一条规模庞大、体系完整的产业链, 是数字经济的重要抓手之一. 在政府、企业等多方面的共同努力下, 中国信创产业市场规模不断扩大, 市场释放出前所未有的活力. 下表为2018-2022年中国信创产业规模(单位: 千亿元), 其中2018-2022年对应的代码依次为1~5.

年份代码 x	1	2	3	4	5
中国信创产业规模 y /千亿元	8.1	9.6	11.5	13.8	16.7

(1) 从2018-2022年中国信创产业规模中任取2个数据, 求这2个数据都大于10的概率.

(2) 由上表数据可知, 可用指数型函数模型 $y = a \cdot b^x$ 拟合 y 与 x 的关系, 请建立 y 关于 x 的回归方程 (a , b 的值精确到0.01), 并预测2023年中国信创产业规模能否超过20千亿元.

参考数据:

\bar{v}	$\sum_{i=1}^5 x_i v_i$	$e^{1.919}$	$e^{0.177}$	1.19^6
2.45	38.52	6.81	1.19	2.84

其中 $v_i = \ln y_i$, $\bar{v} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 v_i$.

参考公式: 对于一组数据 (u_1, w_1) , (u_2, w_2) , \dots , (u_n, w_n) , 其回归直线 $\hat{w} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}u$ 的斜率和截距的最小二乘估计

公式分别为 $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n u_i w_i - n\bar{u}\bar{w}}{\sum_{i=1}^n u_i^2 - n\bar{u}^2}$, $\hat{\alpha} = \bar{w} - \hat{\beta}\bar{u}$.

20. (12分) 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上顶点为 B , 左焦点为 F , 中心为 O . 已知 T 为 x 轴上动点, 直线 BT

与椭圆 C 交于另一点 D ；而 P 为定点，坐标为 $(-2, \sqrt{3})$ ，直线 PT 与 y 轴交于点 Q 。当 T 与 F 重合时，有 $|\overline{PB}| = |\overline{PT}|$ ，且 $2\overline{BT} = \overline{BP} + \overline{BQ}$ 。

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 设 T 的横坐标为 t ，且 $t \in (0, 1)$ ，当 $\triangle DTQ$ 面积等于 $\frac{\sqrt{3}}{5}$ 时，求 t 的取值。

21. (12 分) 设函数 $f(x) = e^x - ax$ ，其中 $a \in R$ 。

(1) 讨论函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的极值；

(2) 若 $a = 1$ ，设 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，当 $t > 1$ 时，有 $\frac{1}{f'(\ln t)} > \frac{\lambda}{f'(-\ln t)} + \frac{\lambda + 1}{\ln t}$ ，求正实数 λ 的取值范围。

22. (10 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，以 O 为极点， x 轴的正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C 和直线 l 的极

坐标方程分别为 $\rho = 2 \sin \theta + 2a \cos \theta$ 和： $\rho \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ 。且二者交于 M ， N 两个不同点。

(1) 写出曲线 C 和直线 l 的直角坐标方程；

(2) 若点 P 的极坐标为 $(2, \pi)$ ， $|PM| + |PN| = 5\sqrt{2}$ ，求 a 的值。