湖北省部分重点中学2020届高三第一次联考数学（理）
参考答案

一、选择题：

1. A　2. B　3. C　4. C　5. C　6. B　7. D　8. D　9. A　10. B　11. B　12. C

二、填空题：

13. -5　14. $\dfrac{2\pi}{3}$　15. $\dfrac{65\pi}{12}$　16. $\ln 2$

三、解答题：

17. （1）$\because a_n + a_{n+1} = 3n+5, n = 1,2,3\cdots$　①

$\therefore a_{n-1} + a_n = 3(n-1)+5, n = 2,3,4\cdots$　②

①－②得 $a_{n+1} - a_{n-1} = 3, n = 2,3\cdots$　…………………………………4分

（2）

$a_1a_2 - a_2a_3 + a_3a_4 - a_4a_5 + \cdots a_{2n-1}a_{2n} - a_{2n}a_{2n+1}$

$= a_2(a_1 - a_3) + a_4(a_3 - a_5) + \cdots + a_{2n}(a_{2n-1} - a_{2n+1})$

$= (-3)(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n})$　…………………………………7分

由（1）得 $\{a_{2n}\}$ 为公差为3的等差数列，又由 $a_1 + a_2 = 8$，得 $a_2 = 7$，

$\therefore$

$a_1a_2 - a_2a_3 + a_3a_4 - a_4a_5 + \cdots a_{2n-1}a_{2n} - a_{2n}a_{2n+1}$

$= (-3)(7n + \dfrac{n(n-1)}{2}\cdot 3) = -\dfrac{9n^2}{2} - \dfrac{33n}{2}$　…………………………………10分

18. （1）由 $\cos\angle BAM = \dfrac{5\sqrt{7}}{14}$ 得 $\sin\angle BAM = \dfrac{\sqrt{21}}{14}$，

由 $\cos\angle AMC = -\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，得 $\sin\angle AMC = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

又 $\angle AMC = \angle BAM + \angle B$，

$\therefore \cos\angle B = \cos(\angle AMC - \angle BAM) = \cos\angle AMC\cdot\cos\angle BAM + \sin\angle AMC\cdot\sin\angle BAM$

$= -\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\cdot\dfrac{5\sqrt{7}}{14} + \dfrac{\sqrt{21}}{7}\cdot\dfrac{\sqrt{21}}{14} = -\dfrac{1}{2}$

$\because B \in (0,\pi)$ $\therefore B = \dfrac{2\pi}{3}$　…………………………………6分

（2）在 ΔABM 中，由正弦定理，得 $\dfrac{AM}{\sin B} = \dfrac{BM}{\sin\angle BAM}$ $\therefore BM = \dfrac{AM\sin\angle BAM}{\sin\angle B} = 1$

因为 M 是边 BC 的中点，所以 $MC = 1$.

故　$S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta AMC} = AM\cdot MC\cdot\sin\angle AMC = \sqrt{7}\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{21}}{7} = \sqrt{3}$　……　12分

$S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta ABM} = AM\cdot BM\cdot\sin\angle BAM = \sqrt{7}\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{21}}{7} = \sqrt{3}$

4

$\dfrac{AM}{\sin B} = \dfrac{BM}{\sin\angle BAM}$

解法二：在ΔABM中，由正弦定理，得

$$BM=\frac{AM\sin\angle BAM}{\sin\angle B}=1$$

因为M是边BC的中点，所以，$S_{\Delta AMC}=S_{\Delta ABM}$，

所以，$S_{\Delta ABC}=2S_{\Delta ABM}=AM\cdot BM\cdot\sin\angle BAM=\sqrt{7}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{21}}{7}=\sqrt{3}$

19. 1）连结AC，交BD于O，由于底面$ABCD$为菱形，$\therefore O$为AC中点.
又M为PC的中点，$\therefore MO//PA$，又$MO\subset$平面MDB，$PA\not\subset$平面MDB，
$\therefore PA//$平面MDB.　　…………………………………………5 分

（2）过P作$PE\perp AD$，垂足为E，由于ΔPAD为正三角形，E为AD的中点. 由于侧面$PAD\perp$底面ABCD，由面面垂直的性质得$PE\perp$平面$ABCD$.
取PB的中点N，连结NM、NA，由于$AP=AB=2,\therefore AN\perp PB$.
又MN为ΔPBC的中位线，$MN\parallel BC$，$BC\parallel AD$，$PB\perp AD$，$\therefore MN\perp PB$，
$\therefore\angle MNA$是二面角$A-PB-C$的平面角.

在$RT\Delta PEB$中，$PE=\sqrt{3}$，$EB=\sqrt{3},\therefore PB=\sqrt{6}$，$EN=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

由$AD\perp PE, AD\perp PB$，得$AD\perp$平面PEB，在$RT\Delta AEN$中，$\tan\angle NAE=\frac{EN}{AE}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

由于$MN//AD$，$\therefore\angle MNA$与$\angle NAE$互补，$\therefore$所求二面角的余弦值为$-\frac{\sqrt{10}}{5}$.
…………………………………………12 分

解法 2：过P作$PE\perp AD$，垂足为E，由于ΔPAD为正三角形，E为AD的中点. 由于侧面$PAD\perp$底面ABCD，由面面垂直的性质得$PE\perp$平面$ABCD$.
由$AD\perp PE, AD\perp PB$，得$AD\perp$平面PEB，$\therefore AD\perp EB\therefore\angle EAB=60^0$.
以E为坐标原点，EP为Z轴，EA为X轴，EB为Y轴，建立空间直角坐标系. 则
$A(1,0,0),B(-1,0,\sqrt{3}),C(-2,\sqrt{3},0),P(0,0,\sqrt{3})$，设平面$PAB$的法向量为$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，
平面PAB的法向量为$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，由$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AB}=0$及$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PA}=0$，

得$\begin{cases}-x_1+\sqrt{3}y_1=0\\-x_1+\sqrt{3}y_1=0\end{cases}$，取$x_1=\sqrt{3}$，得平面 PAB 的一个法向量为$(\sqrt{3},1,1)$.

同理可求得平面 PAB 的一个法向量$(0,1,1)$，由法向量的方向得知，

所求二面角的余弦值为$-\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=-\frac{\sqrt{10}}{5}$. …………………………………………12 分

20.（1）由已知，A,B的坐标分别是$A(a,0),B(0,-b)$，由于ΔABC的面积为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore$有$\frac{1}{2}(2+b)\cdot a=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，又由$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$得$a=\sqrt{2}b$，解得$a=\sqrt{2},b=1$，

5

$\therefore$ 椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$． ……………………………………4 分

（2）设直线PQ的方程为$y=kx+2$，P,Q的坐标分别为$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，

则直线BP的方程为$y=\dfrac{y_1+1}{x_1}x-1$，令$y=0$，得点M的横坐标$x_M=\dfrac{x_1}{y_1+1}$，

直线BQ的方程为$y=\dfrac{y_2+1}{x_2}x-1$，令$y=0$，得点N的横坐标$x_N=\dfrac{x_2}{y_2+1}$，

$\therefore x_M\cdot x_N=\dfrac{x_1x_2}{(y_1+1)(y_2+1)}=\dfrac{x_1x_2}{(kx_1+3)(kx_2+3)}=\dfrac{x_1x_2}{k^2x_1x_2+3k(x_1+x_2)+9}$.

把直线$y=kx+2$代入椭圆$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$得$(1+2k^2)x^2+8kx+6=0$.

由韦达定理得$x_1+x_2=-\dfrac{8k}{1+2k^2},x_1x_2=\dfrac{6}{1+2k^2}$，

$$\therefore x_M\cdot x_N=\frac{\frac{6}{1+2k^2}}{\frac{6k^2}{1+2k^2}+3k(-\frac{8k}{1+2k^2})+9}=\frac{6}{6k^2-24k^2+9+18k^2}=\frac{2}{3}.$$

……………………………………12 分

21.（1）$\bar{x}=0.002\times50\times205+0.004\times50\times255+0.009\times50\times305$
$+0.004\times50\times355+0.001\times50\times405=300$(千米)……………………………3 分

（2）因为X服从正态分布$N(300,50^2)$，

所以$P(250<X\le400)\approx0.9544-\dfrac{0.9544-0.6827}{2}=0.8186$. ……6 分

（3）遥控车开始在第 0 格为必然事件，$P_0=1$，第一次掷硬币出现正面，遥控车移到第一格，其概率为$\dfrac{1}{2}$，即$P_1=\dfrac{1}{2}$．遥控车移到第 n（$2\le n\le19$）格的情况是下列两种，而且也只有两种.

①遥控车先到第$n-2$格，又掷出反面，其概率为$\dfrac{1}{2}P_{n-2}$.

②遥控车先到第$n-1$格，又掷出正面，其概率为$\dfrac{1}{2}P_{n-1}$，

所以$P_n=\dfrac{1}{2}P_{n-2}+\dfrac{1}{2}P_{n-1}$，$\therefore P_n-P_{n-1}=-\dfrac{1}{2}(P_{n-1}-P_{n-2})$.

$\therefore$ 当$1\le n\le19$时，数列$\{P_n-P_{n-1}\}$是公比为$-\dfrac{1}{2}$的等比数列，

$\therefore P_1-1=-\dfrac{1}{2},P_2-P_1=(-\dfrac{1}{2})^2,P_3-P_2=(-\dfrac{1}{2})^3,\cdots P_n-P_{n-1}=(-\dfrac{1}{2})^n$，

6

以上各式相加，得 $P_n-1=(-\frac{1}{2})+(-\frac{1}{2})^2+(-\frac{1}{2})^3+\cdots+(-\frac{1}{2})^n=(-\frac{1}{3})\left[1-(-\frac{1}{2})^n\right]$，

$\therefore P_n=\frac{2}{3}\left[1-(-\frac{1}{2})^{n+1}\right]$（$n=0,1,2,\cdots,19$），

$\therefore$ 获胜的概率 $P_{19}=\frac{2}{3}\left[1-(-\frac{1}{2})^{20}\right]$，

失败的概率 $P_{20}=\frac{1}{2}P_{18}=\frac{1}{3}\left[1+(\frac{1}{2})^{19}\right]$，

$\therefore$ 设参与游戏一次的顾客获得优惠券金额为 X 万元，$X=3$或0，

$\therefore$ X 的期望 $EX=3\cdot\frac{2}{3}\left[1-(\frac{1}{2})^{20}\right]+0\cdot\frac{1}{3}\left[1+(\frac{1}{2})^{19}\right]=2\left[1-(\frac{1}{2})^{20}\right]$

$\therefore$ 参与游戏一次的顾客获得优惠券金额的期望值为 $2\left[1-(\frac{1}{2})^{20}\right]$，约 2 万元.

……………………………12 分

22.（1）$g'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$.

当 $x\in(0,\ \pi]$时，$\because \sin x>0 \therefore g'(x)<0$，

$g(x)$在（0，π）上单调递减，$g(x)<g(0)=0$，$\therefore g(x)$在$(0,\ \pi]$上无零点.

当 $x\in(\pi,2\pi]$时，$\because \sin x<0 \therefore g'(x)>0$，

$g(x)$在（$\pi,2\pi$）上单调递增，$g(\pi)=-\pi<0, g(2\pi)=2\pi>0$，

$\therefore g(x)$在$(\pi,2\pi]$上有唯一零点，

当 $x\in(2\pi,3\pi]$时，$\because \sin x>0 \therefore g'(x)<0$，$g(x)$在（$2\pi,3\pi$）上单调递减.

$\because g(2\pi)>0, g(3\pi)<0$，$\therefore g(x)$在$(2\pi,3\pi]$上有唯一零点.

综上，函数 $g(x)$ 在区间 $(0,3\pi)$ 上有两个零点.　……………………………4 分

（2）$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$.

由（1）知 $f(x)$ 在 $x\in(0,\ \pi]$ 无极值点；在 $x\in(\pi,2\pi]$ 有极小值点，即为 x_1；

在 $x\in(2\pi,3\pi]$ 有极大值点，即为 x_2，同理可得，在 $(3\pi,4\pi]$ 有极小值点 x_3，…

在 $(n\pi,(n+1)\pi]$ 有极值点 x_n.

由 $x_n\cos x_n-\sin x_n=0$ 得 $\tan x_n=x_n$.

$\because x_2>x_1 \therefore \tan x_2>\tan x_1=\tan(x_1+\pi)$，

$\because g(\pi)<0, g(\frac{3\pi}{2})=-1<0, g(2\pi)>0, g(\frac{5\pi}{2})<0$，

$\therefore x_1\in(\pi,\frac{3\pi}{2}), x_2\in(2\pi,\frac{5\pi}{2})$.

$\because x_2, x_1+\pi\in(2\pi,\frac{5\pi}{2})$，由函数 $y=\tan x$ 在 $\left(2\pi,\frac{5\pi}{2}\right)$ 单调递增，得 $x_2>x_1+\pi$，

$\therefore f(x_1)+f(x_2)=\frac{\sin x_1}{x_1}+\frac{\sin x_2}{x_2}=\cos x_1+\cos x_2$.

7

由 $y=\cos x$ 在 $\left(2\pi,\dfrac{5\pi}{2}\right)$ 单调递减得 $\cos x_2<\cos(x_1+\pi)=-\cos x_1$，

$\therefore f(x_1)+f(x_2)<0$.……………………………………………………8 分

同理，$x_{2n-1}\in((2n-1)\pi,2n-\dfrac{\pi}{2}),x_{2n}\in(2n\pi,2n\pi+\dfrac{\pi}{2})$，$2n\pi+\dfrac{\pi}{2}>x_{2n}>x_{2n-1}+\pi>2n\pi$.

由 $y=\cos x$ 在 $\left(2n\pi,2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)(n\in N)$ 上单调递减得 $\cos x_{2n}<-\cos x_{2n-1}$，

$\therefore f(x_{2n})+f(x_{2n-1})=\cos x_{2n}+\cos x_{2n-1}<0$，且 $f(x_{2n})>0,f(x_{2n-1})<0$.

当 n 为偶数时，从 $f(x_1)$ 开始相邻两项配对，每组和均为负值，

即 $\left[f(x_1)+f(x_2)\right]+\left[f(x_3)+f(x_4)\right]+\cdots+\left[f(x_{n-1})+f(x_n)\right]<0$，结论成立；

当 n 为奇数时，从 $f(x_1)$ 开始相邻两项配对，每组和均为负值，还多出最后一项也是负值，

即 $\left[f(x_1)+f(x_2)\right]+\left[f(x_3)+f(x_4)\right]+\cdots+\left[f(x_{n-2})+f(x_{n-1})\right]+f(x_n)<0$，结论也成立.

综上，对一切 $n\in N^+$，$f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\cdots+f(x_n)<0$ 成立. ……………12 分

8

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

识别二维码，快速关注

温馨提示：

全国重点中学 2019-2020 学年高三月考试题及参考答案（更新下载中），点击链接获得

http://www.zizzs.com/c/201910/39637.html